6. Образование твердого движения при помощи аксоидов.

13. Возвратимся теперь к твердому движению, заданному своей *геометрической* характеристикой, т. е. последовательностью положений, занимаемых подвижной системой, независимо от хода движения во времени; это даст нам возможность еще раз воспользоваться теорией относительного движения, как вспомогательным средством при изучении движения.

Положим, что в некотором данном интервале времени задано движение твердой системы S относительно среды $\Omega\xi\eta\zeta$. Может оказаться, что угловая скорость $\bar{\omega}$ системы S обращается в нуль в некоторые моменты движения или даже в некоторые сплошные промежутки времени. Во всяком случае весь интервал движения может быть разбит на промежутки, в каждом из которых угловая скорость $\bar{\omega}$ либо постоянно равна нулю, либо же все время отлична от нуля (за исключением, конечно, моментов, отделяющих один промежуток от другого). В промежутке первого рода твердое движение является поступательным (III, рубр. 4); все точки системы S описывают конгруентные и параллельные траектории по одному и тому же закону; этим путем геометрический ход движения сразу приведен в ясность.

Во вторую очередь рассмотрим промежуток времени, в течение которого угловая скорость все время остается отличной от нуля; в этом случае, как мы знаем, в подвижной системе S в каждый момент такого промежутка существует определенная *ось движения* m; это есть ось того винтового движения, которое в этот момент является тангенциальным по отношению к рассматриваемому твердому движению; если v_0 и $\bar{\omega}$ представляют собою характеристические векторы движения (относительно произвольного полюса O), то твердое движение можно в этот момент рассматривать, как состоящее из вращательного движения с угловой скоростью $\bar{\omega}$ вокруг оси m и из поступательного движения со скоростью

$$\frac{1}{\omega}\,(\boldsymbol{v}_0\bar{\omega})$$

вдоль той же оси; в соответствии с этим элементарное смещение системы за бесконечно малый промежуток времени dt можно рассматривать как составленное из бесконечно малого поворота $\bar{\omega}\,dt$ вокруг оси m и бесконечно малого поступательного смещения вдоль этой оси. Может случиться, что ось движения сохраняет в системе S постоянное направление, т. е. остается неизменной относительно триэдра $Oxyz$, неразрывно связанного с системой S; мы уже знаем, что в этом случае ось сохраняет также неизменное направление относительно триэдра $\Omega\xi\eta\zeta$ или, как обычно говорят, относительно пространства (рубр. **11**); мы имеем, таким образом, дело с поступательно-вращательным движением.

Если исключим эти совершенно частные случаи, то ось движения будет менять свое положение от момента к моменту как относительно подвижного триэдра $Oxyz$, так и относительно неподвижного $\Omega\xi\eta\zeta$: геометрические места, образуемые этими последовательными положениями оси в одной и другой средах (или, что то же, в пространстве и в подвижной системе), представляют собою две линейчатые поверхности Λ и L, которые мы будем называть *неподвижным аксоидом* и *подвижным аксоидом*, поскольку они соответственно неразрывно связаны с триэдрами, которые мы называли неподвижным и подвижным.

В каждый момент оба аксоида Λ и L имеют общую образующую, представляющую в этот момент ось движения; мы постараемся здесь доказать, что в этот момент оба аксоида *соприкасаются* вдоль общей образующей, т. е. в каждой ее точке имеют общую касательную плоскость.

С этой целью представим себе на подвижном аксоиде L произвольную кривую l, пересекающую последовательные его образующие. Вместе с тем, рассмотрим на аксоиде L движение точки P, которая на нем (или, что то же, в системе S) совершает движение таким образом, что в каждый момент находится в пересечении кривой l с соответствующей этому моменту осью движения, т. е. общей в этот момент образующей аксоидов L и Λ.

В результате этого своего (относительного) движения по отношению в среде S, соединенного с твердым движением этой среды относительно триэдра $\Omega\xi\eta\zeta$ (переносного движения), точка P совершает движение (абсолютное) относительно среды $\Omega\xi\eta\zeta$ и описывает в ней некоторую траекторию; так как точка P в каждый момент находится на соответствующей оси движения, то эта траектория лежит на неподвижном аксоиде Λ (и пересекает на нем каждую образующую в одной точке). Поэтому скорости v_a и v_r точки P (абсолютная и относительная) в каждый момент касаются кривых λ и l, а следовательно, и аксоидов Λ и L.

Теперь обратимся к переносной скорости v_τ, т. е. к скорости той точки среды S, с которой P в этот момент совпадает. Припомним, что точка P в каждый момент лежит на оси движения, поэтому v_τ представляет собою ту компоненту скорости тангенциального винтового движения, которая соответствует переносу вдоль оси; следовательно, она в каждый момент направлена по общей образующей обоих аксоидов. Теперь достаточно обратиться к основному соотношению

$$v_a = v_r + v_\tau$$

(рубр. 2), чтобы отсюда заключить, что плоскость двух скоростей v_τ и v_r, касающаяся в точке P аксоида L (поскольку она содержит образующую, проходящую через точку P, и касается лежащей на L кривой l), совпадает с плоскостью скоростей v_τ и v_a, которая (по совершенно аналогичным соображениям) касается аксоида Λ. А так как то же рассуждение можно провести по отношению к любой точке общей образующей двух аксоидов, то отсюда ясно, что они вдоль этой образующей соприкасаются, Из всего этого мы заключаем, что *твердое движение системы происходит таким образом, как будто аксоид L, неразрывно связанный с системой S, катится по неподвижному аксоиду Λ, касаясь его в каждый момент по оси движения.*

Но важно заметить, что, вообще говоря, это качение сопровождается от момента к моменту элементарным скольжением вдоль образующей соприкосновения; в самом деле, как уже было указано с самого начала этого рассуждения, элементарное смещение системы S в каждый момент состоит из бесконечно малого вращения вокруг мгновенной оси и бесконечно малого переноса вдоль этой оси.

Этого элементарного скольжения нет в том и, только в том, случае, когда твердое движение представляет собою чистое вращение, т. е. когда инвариантный трехчлен обоих характеристических векторов (по отношению к любому полюсу) обращается в нуль (рубр. 23 предыдущей главы). Это значит, когда

$$v_0 \overline{\omega} = 0, \tag{15}$$

причем угловая скорость $\overline{\omega}$ не сводится к нулю.

Мы видели (рубр. 24 предыдущей главы), что соотношение (15) всегда имеет место для твердых движений около неподвижной точки или параллельно данной плоскости. Движения последнего типа обстоятельно рассмотрены в следующей главе; здесь же остановимся на движении твердой системы около неподвижной точки.

7. Движение твердой системы около неподвижной точки. Правильная прецессия.

14. Если при движении твердой системы остается неподвижной некоторая точка O (см. рубр. 24 предыдущей главы), то состояние движения представляет собою во всякий момент вращение вокруг некоторой оси, проходящей через точку O; оба аксоида L и Λ представляют собою в этом случае конические поверхности с вершинами в точке O (*конусы Пуансо*), которые соприкасаются друг с другом в каждый момент по общей образующей, меняющей свое положение как на одном, так и на другом конусе (ось движения). Так как в этом случае скольжение по оси отсутствует, то *всякое движение твердой системы вокруг неподвижной точки O происходит таким образом, как будто некоторый конус, неразрывно связанный с данной системой и имеющий вершину в точке O, катится без скольжения по неподвижному конусу с той же вершиной.*

15. Замечательный пример твердых движений около неподвижной точки представляют так называемые *правильные прецессии.* В связи с учением об относительном движении они могут быть определены следующим образом. Представим себе твердую систему S, равномерно вращающуюся вокруг неразрывно с нею связанной оси f; положим, далее, что эта ось пересекает некоторую неподвижную ось в постоянной точке и равномерно вра-