Из всего этого мы заключаем, что *твердое движение системы происходит таким образом, как будто аксоид L, неразрывно связанный с системой S, катится по неподвижному аксоиду Λ, касаясь его в каждый момент по оси движения.*

Но важно заметить, что, вообще говоря, это качение сопровождается от момента к моменту элементарным скольжением вдоль образующей соприкосновения; в самом деле, как уже было указано с самого начала этого рассуждения, элементарное смещение системы S в каждый момент состоит из бесконечно малого вращения вокруг мгновенной оси и бесконечно малого переноса вдоль этой оси.

Этого элементарного скольжения нет в том и, только в том, случае, когда твердое движение представляет собою чистое вращение, т. е. когда инвариантный трехчлен обоих характеристических векторов (по отношению к любому полюсу) обращается в нуль (рубр. 23 предыдущей главы). Это значит, когда

$$v_0 \bar{\omega} = 0, \tag{15}$$

причем угловая скорость $\bar{\omega}$ не сводится к нулю.

Мы видели (рубр. 24 предыдущей главы), что соотношение (15) всегда имеет место для твердых движений около неподвижной точки или параллельно данной плоскости. Движения последнего типа обстоятельно рассмотрены в следующей главе; здесь же остановимся на движении твердой системы около неподвижной точки.

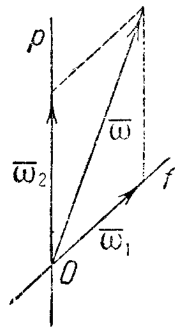
7. Движение твердой системы около неподвижной точки. Правильная прецессия.

14. Если при движении твердой системы остается неподвижной некоторая точка O (см. рубр. 24 предыдущей главы), то состояние движения представляет собою во всякий момент вращение вокруг некоторой оси, проходящей через точку O; оба аксоида L и Λ представляют собою в этом случае конические поверхности с вершинами в точке O (*конусы Пуансо*), которые соприкасаются друг с другом в каждый момент по общей образующей, меняющей свое положение как на одном, так и на другом конусе (ось движения). Так как в этом случае скольжение по оси отсутствует, то *всякое движение твердой системы вокруг неподвижной точки O происходит таким образом, как будто некоторый конус, неразрывно связанный с данной системой и имеющий вершину в точке O, катится без скольжения по неподвижному конусу с той же вершиной.*

15. Замечательный пример твердых движений около неподвижной точки представляют так называемые *правильные прецессии.* В связи с учением об относительном движении они могут быть определены следующим образом. Представим себе твердую систему S, равномерно вращающуюся вокруг неразрывно с нею связанной оси f; положим, далее, что эта ось пересекает некоторую неподвижную ось в постоянной точке и равномерно вращается вокруг последней. Абсолютное движение, составленное из равномерного переносного вращения прямой f вокруг неподвижной оси p и относительного движения системы S, равномерно вращающейся вокруг f, называется правильным *прецессионным движением*, или *правильной прецессией*; неподвижная ось p называется *осью прецессии*; ось f, остающаяся неподвижной в твердой системе — *осью системы*; неподвижная же точка O, в которой пересекаются обе оси, — *полюсом прецессии*.

Прецессия, очевидно, определена, если заданы (в пространстве и в твердой системе) полюс O и угловые скорости составляющих движений — одна постоянная в пространстве, другая постоянная в твердой системе. Если $\overline{\omega}_1$ есть угловая скорость вращения системы вокруг прямой f (фиг. 47), а $\overline{\omega}_2$ — угловая скорость вращения оси вокруг неподвижной прямой p, то угловая скорость абсолютного вращения, т. е. правильного прецессионного движения, $\overline{\omega}$ во всякий момент выражается суммой:

$$\overline{\omega} = \overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2; \tag{16}$$



Фиг. 47.

таким образом, *во всяком правильном прецессионном движении угловая скорость в каждый момент представляет собою сумму двух векторов постоянной длины, один из которых сохраняет постоянное положение в пространстве, а другой — в твердой системе.*

Обратно, легко убедиться, что это свойство вполне характеризует среди движений, сохраняющих постоянную точку, те, которые мы называли правильными прецессиями; оно может быть поэтому рассматриваемо как новое их определение. В самом деле, положим, что некоторая система совершает движение около неподвижной точки с угловой скоростью $\overline{\omega}$, которая в каждый момент представляет собою сумму двух векторов $\overline{\omega}_1$ и $\overline{\omega}_2$, имеющих постоянные длины и удовлетворяющих формулированным выше условиям. Если при этом прямые действия этих векторов f и p проходят через точку O и вторая из них занимает постоянное положение в пространстве, то твердое движение системы можно представить себе составленным из двух равномерных вращений вокруг осей f и p с угловыми скоростями соответственно $\overline{\omega}_1$ и $\overline{\omega}_2$.

16. При правильной прецессии построенный на векторах $\overline{\omega}_1$ и $\overline{\omega}_2$ параллелограм с вершиной в точке O также равномерно вращается вокруг своей стороны, расположенной на прямой p; вследствие постоянства длин ω_1 и ω_2 он сохраняет также свою форму; вследствие этого, в частности, остается постоянным скалярное произведение

$$\overline{\omega}_1 \overline{\omega}_2 .$$

Иными словами, диагональ этого параллелограма, дающая в каждый момент прямую действия угловой скорости $\overline{\omega} = \overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2$ прецессии, т. е. соответствующую ось движения, во все время движения сохраняет постоянные углы как с прямой p, так и с f; отсюда вытекает: *при правильной прецессии оба аксоида представляют собою круглые конусы* (*Пуансо*).

17. Правильные прецессии, при которых постоянный скаляр $\overline{\omega}_1\overline{\omega}_2$ отличен от нуля, называются *прогрессивными* или *регрессивными* в зависимости от того, имеет ли эта постоянная положительное или отрицательное значение, т. е. образуют ли угловые скорости $\overline{\omega}_1$, $\overline{\omega}_2$ острый или тупой угол.

В первом случае каждая угловая скорость обращена в ту же сторону, что и проекция на нее второй угловой скорости; во втором случае они обращены в противоположные стороны. Этим и объясняется название *прогрессивной* и *регрессивной* прецессии.

Выбрав на каждой из двух осей p и f (прецессии и системы) по произволу сторону обращения и обозначив соответствующие единичные векторы через $\overline{\varkappa}$ и $\boldsymbol{k}$, будем иметь:

$$\overline{\omega}_1 = \mu \boldsymbol{k}, \quad \overline{\omega}_2 = \nu \overline{\varkappa},$$

где μ и ν суть скаляры; каждый из этих скаляров имеет положительное или отрицательное значение в зависимости от того, происходит ли соответствующее вращение в правую или в левую сторону относительно ориентированной оси вращения. Отсюда следует, что $\overline{\omega}_1\overline{\omega}_2 = \mu\nu\cos\theta_0$, где θ_0 означает угол между версорами $\overline{\varkappa}$ и $\boldsymbol{k}$; знак произведения этих трех множителей устанавливает, к какому из двух видов принадлежит данное прецессионное движение.

В случае $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$, который мы заранее исключили, настоящий критерий неприложим, и прецессию можно по произволу считать прогрессивной или регрессивной.

18. Другую классификацию правильных прецессий получаем, сличая относительное расположение двух круглых конусов Пуансо. Если представлять себе эти конусы образованными целыми прямыми, то здесь, очевидно, возможно только три случая (если, конечно, исключить случай, когда один из двух конусов вырождается в плоскость): либо каждый конус расположен вне другого, либо подвижной конус расположен внутри неподвижного, либо неподвижный конус расположен внутри подвижного (фиг. 48).

Мы не будем входить в рассмотрение критериев, отличающих эти случаи один от другого, и ограничимся выводом уравнений движения в эйлеровых углах (III, рубр. 29—31). За начало примем полюс прецессии, за оси ζ и z неподвижного и подвижного триэдров примем ориентированные оси p и f, угол между которыми равен θ_0; тогда $\psi = \widehat{\xi N}$ даст аномалию линии узлов N на плоскости, перпендикулярной в точке O к оси $\zeta \equiv p$, а $\varphi = \widehat{Nx}$

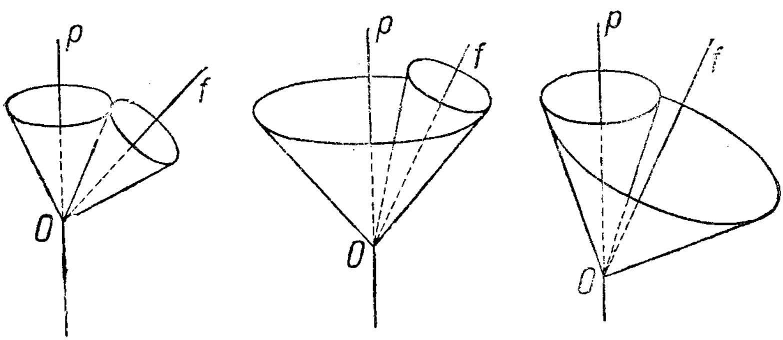
даст аномалию оси x на плоскости, перпендикулярной в точке O к оси $z \equiv f$; таким образом, будем иметь:

$$\dot{\varphi} = \mu, \quad \dot{\psi} = \nu. \tag{17}$$

Интегрируя эти уравнения, мы получим уравнения правильной прецессии:

$$\theta = \theta_0, \quad \varphi = \mu t + \varphi_0, \quad \psi = \nu t + \psi_0, \tag{18}$$

где $\theta_0, \varphi_0, \psi_0$ суть эйлеровы углы при начальном положении твердой системы. Совершенно ясно, что и, обратно, три уравнения (18) всегда выражают правильное прецессионное движение, для которого $O\zeta$ есть ось прецессии, а Oz — ось системы.



Фиг. 48.

19. Правильная прецессия земли. Замечательный пример правильной прецессии представляет движение земли около своего центра O; более того, именно от этого частного случая ведет свое название прецессия. Из элементарной космографии известно, что земля равномерно вращается вокруг своей полярной оси f в левую сторону (против часовой стрелки, т. е. с запада на восток через юг, противоположно видимому движению солнца), совершая полный оборот в течение суток (звездных). Но полярная ось земли f не сохраняет неизменным своего направления относительно неподвижных звезд; напротив того, она, в свою очередь, равномерно вращается (хотя и чрезвычайно медленно) вокруг некоторой прямой постоянного направления p, проходящей через центр земли; эта прямая характеризуется тем, что она перпендикулярна к плоскости эклиптики (т. е. эллиптической орбиты, описываемой землей по законам Кеплера в своем вращении вокруг солнца). Постоянный угол (наименьший) двух прямых (еще не ориентированных) f и p составляет около 23°,5. Представим себе ось f ориентированной от центра земли к северному полюсу B, а ось p ориентированной таким образом, чтобы она составляла упомянутый выше *острый угол* с полупрямой OB. Наиболее древние астрономические наблюдения при сопоставлении их с наблюдениями последних столетий обнаружили, что земная ось OB вращается вокруг оси p (ориентированной по установленному выше соглашению) в сторону движения часовой стрелки (т. е. с востока на запад), совершая полный оборот в период приблизительно в 26 000 лет (звездных), который получил название *платонического года*. Правильная прецессия этим определена.

Видимое вращение земли вокруг оси OB представляется правосторонним, вращение прямой f вокруг p — левосторонним, так что прецессия является регрессивной. Кроме того, если за единицу времени примем звездные сутки, так что платонический год будет содержать этих суток $366 \cdot 26\,000$, т. е., округляя цифры, $360 \cdot 25\,000 = 9 \cdot 10^6$ дней, то в качестве компонент μ и ν скоростей $\overline{\omega}_1$ и $\overline{\omega}_2$ при установленной ориентации осей f и p мы получим значения:

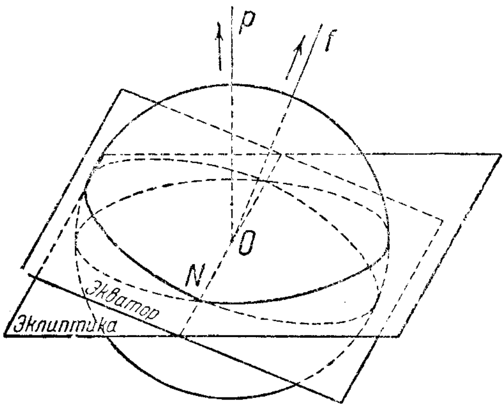
$$\mu = 2\pi, \quad \nu = -\frac{2\pi}{9 \cdot 10^6}. \tag{19}$$

Отсюда ясно, что отношение $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ абсолютных значений этих двух угловых скоростей чрезвычайно мало: оно составляет число порядка 10^{-7}.

Складывая $\overline{\omega}_1 = \mu \overline{k}$ и $\overline{\omega}_2 = \nu \overline{\varkappa}$, мы получаем в качестве прямой действия угловой скорости $\overline{\omega} = \overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2$, т. е. в качестве оси прецессионного движения ориентированную прямую m, расположенную вне угла $\widehat{fp}$ и наклоненную к f под чрезвычайно малым углом в 0,00867″ (упражнение 7 в конце главы); таким образом, подвижной конус Пуансо, имеющий чрезвычайно малое отверстие, катится по внутренней поверхности неподвижного конуса, отверстие которого несколько превышает 23°,5. Вследствие крайней незначительности $|\nu|$ по сравнению с μ, т. е. вследствие медленности переносного движения по сравнению с собственным движением, можно в первом приближении движение земли рассматривать как простое вращение вокруг полярной оси, считая последнюю неподвижной в пространстве; так это обыкновенно и делается; и действительно, в течение большого числа лет и даже столетий вращение прямой f вокруг оси p остается почти совершенно незаметным. Но с течением тысячелетий это отклонение становится доступным астрономическим наблюдениям. Так, например, некоторые созвездия, видимые в настоящее время только в южном полушарии, в отдаленные времена (примерно около 3000 лет назад) были видны в средиземной полосе, как это обнаруживают различные места из библейских и гомеровских сказаний.

20. Предварение равноденствий. Изложенные свойства прецессионного движения непосредственно приводят к объяснению этого астрономического явления.

Как указано в предыдущей рубрике, эклиптика представляет собою не что иное, как плоскость, в которой происходит видимое с земли годовое движение солнца (кеплерово, а в более грубом приближении — круговое), от которого зависит смена времен года. Рассмотрим вместе с ней плоскость земного экватора (т. е. *неподвижную* плоскость, проходящую через центр земли O перпендикулярно к полярной оси OB); пусть N будет ее пересечение с плоскостью эклиптики (фиг. 49). Солнце в этом своем движении, левостороннем относительно ориентированной оси p (см. выше), один раз в год пересекает положительную полупрямую N. Этот момент и представляет собою момент *весеннего равноденствия*; пересечение прямой N с противоположной стороны происходит в момент осеннего равноденствия. Сообразно этому вся прямая N называется *равноденственной прямой*; если угодно, ее можно рассматривать, как линию узлов в системе отсчета, установленной в рубр. 18 при помощи эйлеровых углов.



Фиг. 49

Второе из уравнений (18) обнаруживает, что равноденственная прямая вращается в плоскости эклиптики с угловой скоростью $\dot{\psi} = \nu$; второе равенство (19) показывает, что это движение происходит чрезвычайно медленно, так что в течение ряда лет эта прямая может считаться неподвижной. Но в течение веков движение прямой N становится заметным. Так как $\nu < 0$, то это движение направлено влево по отношению к оси эклиптики p и оси мира f (обращенной к северному полюсу земли), т. е. происходит по часовой стрелке; это приводит к предварению, или прецессии равноденствий, вследствие которых в промежуток, составляющий, примерно, 13 000 звездных лет (половина платонического года), происходит полное обращение температурных условий, характеризующих времена года в данном месте земли.

8. Определение твердого движения по данным его характеристикам.

21. Если задано твердое движение, то мы всегда умеем при помощи одних только диференциальных операций (последовательным диференцированием) разыскать два вектора $\boldsymbol{v}_0$ и $\boldsymbol{\omega}$, зависящие только от времени (которые мы назвали *характеристическими* векторами или просто *характеристиками* движения); они дают возможность явным образом выразить состояние движения в каждый момент (III, рубр. 20). Здесь, в дополнение к кинематике твердых тел, мы займемся обратной задачей—