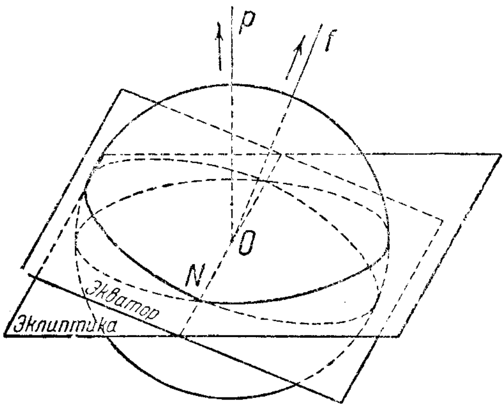
мое с земли годовое движение солнца (кеплерово, а в более грубом приближении — круговое), от которого зависит смена времен года. Рассмотрим вместе с ней плоскость земного экватора (т. е. *неподвижную* плоскость, проходящую через центр земли O перпендикулярно к полярной оси OB); пусть N будет ее пересечение с плоскостью эклиптики (фиг. 49). Солнце в этом своем движении, левостороннем относительно ориентированной оси p (см. выше), один раз в год пересекает положительную полупрямую N. Этот момент и представляет собою момент *весеннего равноденствия*; пересечение прямой N с противоположной стороны происходит в момент осеннего равноденствия. Сообразно этому вся прямая N называется *равноденственной прямой*; если угодно, ее можно рассматривать, как линию узлов в системе отсчета, установленной в рубр. 18 при помощи эйлеровых углов.



Фиг. 49

Второе из уравнений (18) обнаруживает, что равноденственная прямая вращается в плоскости эклиптики с угловой скоростью $\dot{\psi} = \nu$; второе равенство (19) показывает, что это движение происходит чрезвычайно медленно, так что в течение ряда лет эта прямая может считаться неподвижной. Но в течение веков движение прямой N становится заметным. Так как $\nu < 0$, то это движение направлено влево по отношению к оси эклиптики p и оси мира f (обращенной к северному полюсу земли), т. е. происходит по часовой стрелке; это приводит к предварению, или прецессии равноденствий, вследствие которых в промежуток, составляющий, примерно, 13 000 звездных лет (половина платонического года), происходит полное обращение температурных условий, характеризующих времена года в данном месте земли.

8. Определение твердого движения по данным его характеристикам.

21. Если задано твердое движение, то мы всегда умеем при помощи одних только диференциальных операций (последовательным диференцированием) разыскать два вектора v_0 и ω, зависящие только от времени (которые мы назвали *характеристическими* векторами или просто *характеристиками* движения); они дают возможность явным образом выразить состояние движения в каждый момент (III, рубр. 20). Здесь, в дополнение к кинематике твердых тел, мы займемся обратной задачей—

установить движение твердой системы, если его характеристические векторы заданы в функции времени.

Эта проблема представляется в двух различных видах, смотря по тому, заданы ли векторы v_0 и $\overline{\omega}$ (в функции времени) относительно неподвижных осей $\Omega\xi\eta\zeta$ или относительно подвижных осей $Oxyz$. В обоих случаях задача заключается в том, чтобы по этим заданиям притти обратно к четырем геометрическим функциям $O(t)$, $\boldsymbol{i}(t)$, $\boldsymbol{j}(t)$, $\boldsymbol{k}(t)$ (положение начала и основные версоры подвижного триэдра), которыми, как мы видели при изложении кинематики твердых тел (III, рубр. 1), определяется твердое движение.

Здесь мы займемся сначала тем случаем, когда характеристические векторы v_0 и $\overline{\omega}$ заданы по отношению к подвижному триэдру; формально это означает, что нам известны в функции времени компоненты u, v, w и p, q, r.

На первый взгляд могло бы казаться более естественным начать изложение с того случая, когда характеристики заданы по отношению к неподвижному триэдру; но в действительности очень часто именно система отсчета, неразрывно связанная с твердым телом, дает возможность лучше и быстрее охватить ход движения.

22. В первую очередь, мы займемся частным случаем, когда данное твердое тело движется около неподвижной точки. Эту точку мы примем за общее начало $\Omega \equiv O$ обоих триэдров; все сводится, таким образом, к определению взаимного расположения этих двух триэдров. Расположение это, как только что было указано, определяется тремя основными версорами $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ подвижных осей; но, естественно, мы можем представить себе также заданным положение триедра $\Omega\xi\eta\zeta$ относительно $Oxyz$. В том и другом случае компоненты версоров вполне определяются девятью направляющими косинусами:

$$\begin{array}{ccc} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{array}$$

в первом задании эти косинусы нужно взять по горизонталям, во втором — по вертикалям.

На основе этого замечания решение нашей проблемы сводится к тому, чтобы определить, как меняются в подвижной системе компоненты произвольного неподвижного вектора $\boldsymbol{u}$, т. е. неизменно связанного с триэдром $\Omega\xi\eta\zeta$; после этого остается только отождествить этот вектор $\boldsymbol{u}$ последовательно с каждым из трех основных векторов неподвижного триэдра, чтобы получить для каждого момента девять направляющих косинусов.

Какой-нибудь неподвижный вектор $\boldsymbol{u}$ в обозначениях рубр. **10** характеризуется диференциальным уравнением:

$$\frac{d_o \boldsymbol{u}}{dt} = 0;$$

если через $\overline{\omega}$ обозначим угловую скорость твердого тела, а через $\dot{u}$ производную вектора u, взятую по отношению к подвижным осям, то это диференциальное уравнение примет вид:

$$\dot{u}+[\overline{\omega}u]=0. \qquad (20)$$

Если спроектируем обе части этого уравнения на оси подвижного триэдра и, как обыкновенно, обозначим через p, q, r компоненты угловой скорости на подвижные оси (которые нам заданы в функциях времени, допускающих производные), то мы получим систему диференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} \dot{u}_x &= ru_y - qu_z, \\ \dot{u}_y &= pu_z - ru_x, \\ \dot{u}_z &= qu_x - pu_y. \end{aligned} \qquad (20')$$

Нам нужно было бы эту систему проинтегрировать; но это интегрирование мы вообще выполнить не умеем; однако при удачном выборе переменных можно точнее установить, в чем, собственно, заключается трудность проблемы; это одновременно выявляет также наиболее замечательные частные случаи, в которых интегрирование приводится к квадратурам.

23. То обстоятельство, что u есть постоянный вектор и, следовательно, с течением времени сохраняет постоянную длину выражается первым интегралом системы:

$$u_x^2+u_y^2+u_z^2=\text{const.};$$

этот интеграл можно, конечно, получить непосредственно из диференциальных уравнений (20'); их достаточно для этого помножить соответственно на u_x, u_y, u_z, почленно сложить и затем выполнить интегрирование; постоянная правой части сводится к единице, если u есть единичный вектор, как мы это предполагаем.

Полученное, таким образом, уравнение

$$u_x^2+u_y^2+u_z^2=1 \qquad (21)$$

подсказывает специальный выбор переменных, который позволяет свести интегрирование системы (20') к более простой системе, содержащей только две неизвестные функции.

Для этого заметим, прежде всего, что мы можем считать вектор u приложенным в начале координат O; тогда его свободный конец (координатами которого служат компоненты u_x, u_y, u_z) движется относительно триэдра $Oxyz$ по сфере, центр которой совпадает с точкой O, а радиус равен единице; вследствие этого положение точки P или, что то же, три величины u_x, u_y, u_z могут быть выражены любой парой гауссовых координат на сфере, в частности параметрами λ, μ двух систем ее комплексных образующих (так называемые симметрические координаты) [1].

[1] О гауссовых координатах и вводимых здесь так называемых симметрических координатах на сфере см. приложение III.

Как известно, эти две системы можно разыскать, если написать уравнения (21) в виде:

$$(u_x+iu_y)\,(u_x-iu_y)+(u_z+1)\,(u_z-1)=0;$$

тогда параметры λ и μ определяются уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= \frac{u_x+iu_y}{1-u_z} = \frac{1+u_z}{u_x-iu_y}\,, \\ -\frac{1}{\mu} &= \frac{u_x-iu_y}{1-u_z} = \frac{1+u_z}{u_x+iu_y}\,. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Отсюда следует, что при вещественных значениях u_x, u_y, u_z параметры λ и μ имеют комплексные значения, причем $-\frac{1}{\mu}$ и λ суть сопряженные комплексные числа.

Теперь легко разрешить уравнения (22) относительно u_x, u_y, u_z, конечно, в предположении, что они связаны соотношением (21); это последнее сказывается в том, что два выражения, которые уравнения (22) дают для λ и для $-\frac{1}{\mu}$, тождественны между собой. В самом деле, перемножая почленно соотношения

$$\frac{u_x+iu_y}{1-u_z}=\lambda, \qquad \frac{1+u_z}{u_x+iu_y}=-\frac{1}{\mu}\,, \tag{23}$$

получаем, прежде всего, линейное уравнение относительно u_z; разрешив его, найдем:

$$u_z=\frac{\lambda+\mu}{\lambda-\mu}. \tag{24}$$

Подставив эти выражения в уравнения (22), легко получим:

$$u_x+iu_y=\frac{-2\lambda\mu}{\lambda-\mu}\,, \qquad u_x-iu_y=\frac{2}{\lambda-\mu}\,, \tag{23'}$$

откуда непосредственно найдем:

$$u_x=\frac{1-\lambda\mu}{\lambda-\mu}\,, \quad u_y=i\,\frac{1+\lambda\mu}{\lambda-\mu}\,. \tag{24'}$$

24. Теперь подставим в уравнения (20′) вместо u_x, u_y, u_z их выражения через λ и μ, содержащиеся в формулах (24′) и (24). Мы получаем тогда три диференциальные уравнения относительно λ и μ, из которых одно, как следовало предвидеть, представляет собою следствие двух остальных; эти же последние могут быть написаны в виде:

$$\frac{d\lambda}{dt}=\frac{q-ip}{2}-ir\lambda+\frac{q+ip}{2}\lambda^2, \tag{25}$$

$$\frac{d\mu}{dt}=\frac{q-ip}{2}-ir\mu+\frac{q+ip}{2}\mu^2. \tag{25'}$$

Мы приходим, таким образом, к замечательному выводу, что λ и μ представляют собою два решения (какие угодно) одного и того же уравнения Риккати[1]), коэфициенты которого представляют собою линейные и однородные функции от характеристик.

Проинтегрировав это уравнение, мы непосредственно получаем компоненты u_x, u_y, u_z произвольного постоянного вектора u в функции времени, в частности, и компоненты трех основных векторов триэдра.

Следует еще отметить, что по самой природе вопроса характеристики p, q, r суть вещественные функции времени; таковы же и компоненты определяемого вектора u. Поэтому достаточно получить одно комплексное решение λ уравнения Риккати (25), а затем положить $\mu = -\frac{1}{\bar{\lambda}}$, где черта, поставленная над комплексной величиной, как обыкновенно, обозначает сопряженную с ней комплексную величину.

То, что $-\frac{1}{\bar{\lambda}}$ представляет решение уравнения (25) совместно с λ, вытекает из предыдущего рассуждения; но это можно также легко обнаружить и непосредственным формальным вычислением. В самом деле, деля уравнение (25) на λ^2, получаем:

$$\frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{\lambda}\right) = \frac{q+ip}{2} - ir\frac{1}{\lambda} + \frac{q-ip}{2}\frac{1}{\lambda^2}.$$

Здесь достаточно заменить i через $-i$ и написать μ вместо $-\frac{1}{\bar{\lambda}}$, чтобы тотчас получить выражение (25').

Заметим, наконец, что поставленная задача сведена к разысканию двух или даже только одного решения уравнения Риккати; но этим она отнюдь не исчерпана, ибо интегрировать это уравнение мы вообще не умеем. Но имеет место следующее свойство: если каким-либо образом удалось разыскать одно, два или три частных решения этого уравнения, то общий интеграл можно выразить соответственно двумя квадратурами, одной квадратурой или в конечном виде.

25. Переходим теперь к случаю свободного движения твердого тела. Мы предположим, что оба характеристических вектора v_0 и $\bar{\omega}$ заданы в функции времени, т. е. что заданы их компоненты u, v, w и p, q, r, которые мы все предполагаем конечными, непрерывными и допускающими производные.

Что касается девяти направляющих косинусов α_i, β_i, γ_i, определяющих ориентацию осей одного триэдра относительно другого, то о них можно повторить без каких бы то ни было существенных изменений все, что было сказано в предыдущем параграфе; мы можем поэтому считать их уже определенными, так

[1]) Яков Риккати (Jacopo Riccati) родился в Венеции в 1676 г., умер в Тревизо в 1754 г.; он занимался математикой частным образом, не занимая никаких официальных постов. Правительство Венецианской республики часто консультировало с ним по вопросам гидравлики. Уравнение, носящее его имя, было им опубликовано в лейпцигских „Acta Eruditorum“ в 1722 г.

что остается только разыскать функцию $O(t)$, т. е. установить движение точки O.

Но скорость $\boldsymbol{v}_0$ точки O, по предположению, имеет компоненты u, v, t, заданные в функции времени. С другой стороны, компоненты той же скорости по осям неподвижного триэдра выражаются производными неизвестных координат α, β, γ точки O; мы получаем поэтому в обычных обозначениях уравнения:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \alpha_1 u + \alpha_2 v + \alpha_3 w,$$

$$\frac{d\beta}{dt} = \beta_1 u + \beta_2 v + \beta_3 w,$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \gamma_1 u + \gamma_2 v + \gamma_3 w;$$

и так как правые части суть известные нам функции от t, то определение неизвестных функций α, β, γ требует только квадратур.

26. Прибавим еще несколько слов о решении той же задачи в другом ее виде, когда векторы $\boldsymbol{v}_0$ и $\bar{\omega}$ заданы своими компонентами, отнесенными к неподвижным осям.

В этом случае установлению движения точки O нет необходимости, как выше, предпосылать определение направляющих косинусов α_i, β_i, γ_i. В самом деле, поскольку среди данных задачи уже фигурируют компоненты скорости $\boldsymbol{v}_0$ по неподвижным осям, нам известны производные координат α, β, γ в функции времени.

Что касается определения взаимной ориентации одного триэдра относительно другого, то мы к этому приходим совершенно так же, как выше, обращая только роль каждого из двух триэдров. Теперь вспомогательным вектором $\boldsymbol{u}$, с которым мы имели дело в рубр. 22—24, будет служить вектор, неразрывно связанный с нашим твердым телом; диференциальные уравнения задачи мы получим, проектируя на оси неподвижного триэдра $\Omega\xi\eta\zeta$ обе части тождества

$$\frac{d_a \boldsymbol{u}}{dt} = [\bar{\omega} \boldsymbol{u}],$$

к которому в настоящем случае приводится соотношение (13) рубр. **10**, так как $\boldsymbol{u}$ представляет собой постоянный вектор относительно подвижных осей.

УПРАЖНЕНИЯ.

1. Пусть T_0 будет некоторый триэдр, относительно которого совершают движения триэдры $T_1, T_2, T_3, \ldots, T_n$. Обозначим через P точку, которая движется неразрывно с триэдром T_n. Пусть M_i $(i = 1,2,3,\ldots, n)$ будет движение, которое точка P совершала бы относительно триэдра T_{i-1}, если бы она была связана твердой связью с триэдром T_i[1]. Движение точки P относительно среды T_0 совпадает с движением, составленным из движений $M_1, M_2, \ldots, M_n$ (III, рубр. **10**).

[1] Т. е. движение точки, имеющей в каждый момент скорость той точки среды T_i, с которой в этот момент совпадает точка P. (*Ред.*)