ГЛАВА V.

Плоские движения твердой системы.

1. Общие соображения. Теорема Эйлера о мгновенном центре вращения.

1. Возвратимся теперь к изучению движений твердой системы, происходящих параллельно некоторой определенной плоскости; эту последнюю мы всегда будем считать неразрывно связанной с системой отсчета, которую будем условно называть *неподвижной* (III, рубр. 27 и IV, рубр. 13). Мы уже показали в своем месте, что этого рода движение всегда реализуется таким образом, что некоторая плоскость p, принадлежащая движущейся системе S, движется, оставаясь в неподвижной плоскости π.

Если P есть точка системы S, расположенная вне плоскости π, то мы рассмотрим ее ортогональную проекцию P_1 на плоскость π. Вследствие твердости системы вектор $\overline{P_1P}$ будет оставаться перпендикулярным к плоскости π (и к совпадающей с нею плоскости p) и будет сохранять неизменной свою длину; поэтому точка P будет оставаться в плоскости, параллельной π, она будет описывать в ней траекторию, конгруентную и параллельную той, которую описывает точка P_1, и притом по этому же путевому уравнению. Таким образом, всякая плоскость, параллельная p (и неизменно связанная с системой S), движется, оставаясь в себе самой. В этих параллельных плоскостях движение имеет все время те же кинематические свойства и соотношения. Мы можем поэтому ограничиться изучением движения одной плоскости в самой себе, т. е. изучением *плоского твердого движения*.

Ввиду того интереса, который этого рода движения представляют по своим приложениям, мы здесь не ограничимся выводом их свойств из общих законов движения твердых тел (гл. III и IV); мы присоединим еще некоторые элементарные соображения, которые дают возможность установить теорию плоских движений непосредственным и независимым путем.

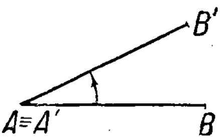
2. В рубр. 24 гл. III было показано, что всякое твердое движение, происходящее параллельно неподвижной плоскости π, в каждый момент представляет собою либо вращательное движение (вокруг оси, перпендикулярной к постоянной плос-

кости π) либо поступательное (в направлении, параллельном этой плоскости). Отсюда следует, что всякое движение плоскости в самой себе есть либо чисто вращательное движение (вокруг некоторой точки этой плоскости) либо поступательное (в самой плоскости).

Этот важный результат мы вновь докажем непосредственно элементарным путем. С этой целью сравним положения, занимаемые плоскостью p в два последовательных момента t и $t+dt$. Из первого положения во второе плоскость p перешла некоторым определенным непрерывным движением. Но если отвлечься от кинематических обстоятельств движения, относящихся к моментам времени, заключенным между t и $t+\Delta t$, то плоскость p всегда можно перевести из первого положения во второе вращением, или, в частном случае, поступательным перемещением (прямолинейным); это приводит к следующей теореме Эйлера: *всякое смещение твердой плоскости в самой себе может быть выполнено некоторым вращением или, в частном случае, некоторым прямолинейным поступательным перемещением.*

Это, впрочем, факт чисто геометрический, так как закон этого перемещения в его зависимости от времени остается совершенно неопределенным.

Чтобы доказать формулированное предложение, нужно, прежде всего, геометрически определить одно из двух положений плоскости p относительно другого. Если A и B суть положения, которые первоначально занимали на плоскости π определенные две точки движущейся плоскости p, то достаточно знать положения A' и B' тех же точек в конечный момент, и положение всей плоскости в этот момент будет вполне определенно; при этом, конечно, вследствие твердости плоскости p $A'B' = AB$. В самом деле, если C есть положение, которое в начальный момент занимала произвольная третья точка плоскости p, то в конечный момент она займет такое положение C, что фигура ABC (треугольная или прямолинейная) будет конгруентна с $A'B'C'$; а такая точка существует только одна (конечно, в предположении, что ABC совмещается с $A'B'C'$ движением плоскости в себе). Это обнаруживает, что перемещение точек A и B в A' и B' приводит к перемещению всей плоскости в ее конечное положение.



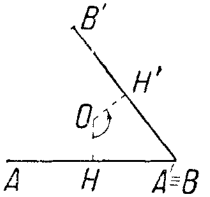
Фиг. 50.

Если, в частном случае, точка A' совпадает с A (фиг. 50), то достаточно произвести вращение плоскости p вокруг точки $A \equiv A'$, и точка B по окружности радиуса AB перейдет в B' после поворота на угол $\widehat{BAB'}$.

Исключая этот случай, т. е. предполагая точку A' отличной от A, выберем в плоскости p в качестве второй точки B ту, которая в начальный момент как раз совпадает с точкой A'. Ее конечное положение B' вследствие условия $A'B' \equiv AB$ будет лежать на окружности с центром $A' \equiv B$ и радиуса BA. При этом непременно будет иметь место один из следующих трех случаев, которые мы разберем в отдельности.

a) *Точка B' не лежит на прямой AA'* (фиг. 51).

В этом случае точка пересечения O осей отрезков AA' и BB' (т. е. перпендикуляров к ним из их середин H и H') представляет собой центр, вращением вокруг которого на угол $\widehat{HOH'}$ можно совместить точки A и B с точками A' и B'.



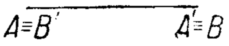
Фиг. 51.

b) *Точка B' расположена на прямой AB и притом совпадает* с A (фиг. 52).

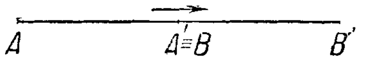
В этом случае для нашей цели достаточно повернуть плоскость p на 180° вокруг середины отрезка AA' (совпадающего с BB').

c) Если, наконец, точка B' лежит на продолжении отрезка AA' (фиг. 53), т. е. симметрично с A относительно $A' \equiv B$, то пара точек A, B совмещается с A', B' при поступательном перемещении плоскости p, выражаемом ориентированным отрезком AA'.

Установив таким образом теорему Эйлера, заметим, что самое ее доказательство приводит к следующему факту: если смещение осуществляется при помощи вращения, то через центр этого вращения проходят оси всех отрезков, соединяющих начальное положение A какой-либо точки плоскости p с конечным ее положением.



Фиг. 52.



Фиг. 53.

Заметим, наконец, что случай „c“ поступательного перемещения мы можем рассматривать как предельный случай вращения, представляя себе центр последнего удаленным в бесконечность (в направлении, перпендикулярном к перенесению).

3. После всего изложенного возвратимся к движению твердой плоскости p по себе самой; в промежутке времени от t до $t+dt$, рассмотрим одновременно как действительно происшедшее движение, так и фиктивное вращательное или поступательное движение (предполагая его, например, равномерным), которое осуществляет то же конечное смещение. Если, сохраняя момент t, мы будем неограниченно уменьшать Δt, то фиктивное движение будет от момента к моменту изменяться; в пределе оно будет стремиться к некоторому бесконечно малому движению, вращательному или поступательному, которое производит то же бесконечно малое перемещение dA любой точки A, что и действительное движение за элемент времени от t до $t+dt$, а потому совпадает с ним. Таким образом доказано, что всякое состояние плоского твердого движения является *в каждый момент вращательным, или в частном случае, поступательным.*

4. Во всякий момент, в который плоское движение является вращательным, центр I элементарного вращения (предельное положение центра O фиктивного конечного вращения) называется *мгновенным центром* или *полюсом* движения в рассматриваемый момент; этот центр представляет собою аналог мгновенной оси твердого движения в пространстве (III, рубр. **21**). Если же движение поступательное, то центр можно себе представлять в бесконечности (в направлении, перпендикулярном к бесконечно малому поступательному смещению).

Так как в любом интервале Δt центр фиктивного вращательного движения представляет собою общую точку осей всех смещений AA' отдельных точек, то, переходя к пределу, получаем теорему *Шаля* [1]. *При плоском твердом движении, в каждый его момент, нормали, проведенные в отдельных точках движущейся плоскости к соответствующим траекториям, проходят через общую точку — мгновенный центр движения; в частности, если движение в некоторый момент является поступательным, то все эти нормали параллельны между собой.*

Вместе с тем на основании предложения рубр. **6** гл. III *в первом случае скорость каждой точки A движущейся плоскости перпендикулярна к прямой AI, соединяющей эту точку с мгновенным центром; скалярное значение скорости пропорционально расстоянию точки от центра I.*

Таким образом, в частности, каково бы ни было состояние плоского вращательного движения, мгновенный центр характеризуется тем, что он представляет собою единственную точку движущейся плоскости, скорость которой равна нулю; между тем, как мы хорошо знаем, при любом поступательном движении все точки плоскости имеют эквиполентные, или просто *равные* скорости.

2. Полярные траектории.

5. Рулетта и ее базы. Если твердое движение плоскости p по неподвижной плоскости π в течение некоторого промежутка времени остается поступательным (т. е. мгновенный центр вращения в этот промежуток все время остается в бесконечности), то ход его имеет характер, присущий всякому поступательному движению, как это изложено в рубр. **3** и **4** гл. III.

В иные промежутки времени мгновенный центр может оказаться в бесконечности только в отдельные моменты; вследствие этого весь промежуток движения может быть разбит на интервалы, в каждом из которых движение остается либо все время поступательным (кроме пограничных моментов), либо вращательным.

В течение промежутка последнего типа подвижная плоскость отмечает в каждый момент на плоскости π определенный центр

---

[1] Михаил Шаль (Michele Chasles) родился в Эперноне (провинция Eure et Loir) в 1793 г., умер там же в 1880 г., был профессором геометрии в Парижском университете, разрабатывал также вопросы истории математики.