4. Во всякий момент, в который плоское движение является вращательным, центр I элементарного вращения (предельное положение центра O фиктивного конечного вращения) называется *мгновенным центром* или *полюсом* движения в рассматриваемый момент; этот центр представляет собою аналог мгновенной оси твердого движения в пространстве (III, рубр. **21**). Если же движение поступательное, то центр можно себе представлять в бесконечности (в направлении, перпендикулярном к бесконечно малому поступательному смещению).

Так как в любом интервале Δt центр фиктивного вращательного движения представляет собою общую точку осей всех смещений AA' отдельных точек, то, переходя к пределу, получаем теорему *Шаля* [1]. *При плоском твердом движении, в каждый его момент, нормали, проведенные в отдельных точках движущейся плоскости к соответствующим траекториям, проходят через общую точку — мгновенный центр движения; в частности, если движение в некоторый момент является поступательным, то все эти нормали параллельны между собой.*

Вместе с тем на основании предложения рубр. **6** гл. III *в первом случае скорость каждой точки A движущейся плоскости перпендикулярна к прямой AI, соединяющей эту точку с мгновенным центром; скалярное значение скорости пропорционально расстоянию точки от центра I.*

Таким образом, в частности, каково бы ни было состояние плоского вращательного движения, мгновенный центр характеризуется тем, что он представляет собою единственную точку движущейся плоскости, скорость которой равна нулю; между тем, как мы хорошо знаем, при любом поступательном движении все точки плоскости имеют эквиполентные, или просто *равные* скорости.

2. Полярные траектории.

5. Рулетта и ее базы. Если твердое движение плоскости p по неподвижной плоскости π в течение некоторого промежутка времени остается поступательным (т. е. мгновенный центр вращения в этот промежуток все время остается в бесконечности), то ход его имеет характер, присущий всякому поступательному движению, как это изложено в рубр. **3** и **4** гл. III.

В иные промежутки времени мгновенный центр может оказаться в бесконечности только в отдельные моменты; вследствие этого весь промежуток движения может быть разбит на интервалы, в каждом из которых движение остается либо все время поступательным (кроме пограничных моментов), либо вращательным.

В течение промежутка последнего типа подвижная плоскость отмечает в каждый момент на плоскости π определенный центр

---

[1] Михаил Шаль (Michele Chasles) родился в Эперноне (провинция Eure et Loir) в 1793 г., умер там же в 1880 г., был профессором геометрии в Парижском университете, разрабатывал также вопросы истории математики.

вращения или *полюс* I, с которым совпадает некоторая точка C движущейся плоскости p. С течением времени полюс меняет свое положение как на неподвижной плоскости π, так и на подвижной p. Таким образом получаются две кривые: одна λ, которую точка I описывает на неподвижной плоскости, другая l, которую описывает точка C на подвижной плоскости. Эти две кривые, соответствующие здесь аксоидам произвольного твердого движения (§ 6, IV), называются *взаимно полярными траекториями*. В частности, кривая l, описанная на подвижной плоскости, называется *рулеттой*, а соответствующая кривая λ на неподвижной плоскости — *ее базой*.

6. Важность изучения этих двух траекторий коренится в следующем предложении: *в течение движения рулетта катится без скольжения по своей базе*. Эта теорема, которая в плоскости аналогична предложению, установленному в предыдущей главе для пространства, доказывается совершенно такими же соображениями, именно при помощи фиктивного относительного движения. Однако мы здесь вкратце повторим это рассуждение, чтобы развить учение о плоском движении совершенно независимо от общей теории движения твердых тел.

Рулетта и ее база имеют в каждый момент общую точку, с которой в этот момент совпадают подвижный полюс C и неподвижный I. Рассмотрим движение точки C по подвижной плоскости p, траекторией которого является рулетта l. Поскольку рулетта связана с подвижной плоскостью p, она увлекается переносным ее движением по неподвижной плоскости π; таким образом, движение точки C по неподвижной плоскости π мы можем рассматривать как абсолютное движение; оно определяется данным движением плоскости p как переносным движением, и движением точки C по рулетте как относительным. В каждый момент, как уже сказано, точка C совпадает с некоторой точкой на неподвижной плоскости; таким образом, база рулетты представляет собой не что иное, как траекторию абсолютного движения точки C. Если вообразим себе материальную точку, совпадающую в каждый момент с точкой I, то таковая совершает относительное движение по рулетте l, а абсолютное по ее базе λ. Вместе с тем по принципу относительного движения (рубр. 2 предыдущей главы) имеет место соотношение:

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_r, \tag{1}$$

так как переносная скорость, т. е. скорость точки C относительно плоскости π равна нулю, так как C является мгновенным центром (рубр. 4).

Соотношение (1) непосредственно обнаруживает, что обе полярные траектории в каждый момент имеют в общей точке I ту же касательную. Более того, поскольку это тождество устанавливает, что элементарные смещения точки I по обеим траекториям совпадают, то каждая траектория катится по другой без скольжения.

Таким образом установлено, что каждое непоступательное движение может быть осуществлено качением кривой, неразрывно связанной с неподвижной плоскостью (рулетты) по неподвижной кривой (ее базе).

Заметим, что взаимное с этим движение [т. е. движение плоскости π относительно плоскости p (рубр. 8 предыдущей главы)] имеет те же полярные траектории.

3. Сопряженные профили.

7. Понятие о полярных траекториях допускает обобщение, которое, как увидим, имеет значительный интерес с прикладной точки зрения. Положим, что некоторая твердая фигура F движется по плоскости, а c есть некоторая (плоская) кривая, неразрывно с этой фигурой связанная. Последовательные положения, которые кривая c занимает в своем переносном движении совместно с фигурой F, будут, вообще говоря, иметь некоторую огибающую γ. Всякий раз как такая огибающая действительно существует, ее называют *сопряженным профилем* кривой c.

По основному свойству огибающей кривая c в каждый момент касается ее в точке M, которая от момента к моменту может менять свое положение. Отсюда, прежде всего, ясно, что соотношение между кривыми c и γ является взаимным. В самом деле, если рассмотрим взаимное движение, т. е. движение кривой γ относительно фигуры F, то на кривую c можно смотреть, как на огибающую различных положений кривой γ, поскольку c в каждый момент соприкасается с соответствующим положением последней. Этим оправдывается и название сопряженных профилей без указания того, который профиль является подвижным и который представляет огибающую.

8. Во всяком случае *общая нормаль к кривым c и γ в точке их соприкосновения M в каждый момент проходит через соответствующий мгновенный центр вращения* (будь он собственный или несобственный).

Если точка M совпадает с I, то дело ясно. В общем случае, когда точка M отлична от I, мы прибегнем к обычным соображениям, опирающимся на свойства относительного движения. Именно, за относительное движение мы будем считать движение точки M по кривой c, а переносным будет служить движение фигуры F по отношению к неподвижной плоскости, т. е. движение кривой c относительно γ; при этих условиях абсолютным движением будет движение точки M по отношению к неподвижной плоскости, которое совершается по кривой γ. Таким образом $\boldsymbol{v}_r$ (относительная скорость точки M) есть скорость движения точки M по траектории c, $\boldsymbol{v}_a$ (абсолютная скорость той же точки) есть скорость точки M по траектории γ. Так как кривые c и γ в точке M соприкасаются, то обе скорости направлены по общей их касательной; но в таком случае по той же прямой направлена их разность $\boldsymbol{v}_a - \boldsymbol{v}_r$, т. е. переносная ско-