

рость точки M . С другой стороны, поскольку переносное движение представляет собою в этот момент вращение вокруг точки I (рубр. 4), его скорость перпендикулярна к радиус-вектору IM , который, таким образом, имеет направление общей нормали обеих профилей. В предельном случае поступательного движения (когда точка I находится на бесконечности) переносная скорость, а с нею и касательные к профилям имеют направление переноса.

9. В качестве частного случая установленного сейчас предложения мы вновь приходим к теореме Шаля. Для этого достаточно предположить, что профиль s сводится к одной точке P или, если угодно (чтобы сделать выделяемый частный случай более наглядным) к бесконечно малой окружности вокруг точки P . Обгибающая γ в этом случае, очевидно, совпадает с траекторией точки P на плоскости γ ; точка соприкосновения M кривых s и γ в каждый момент совпадает с положением точки P , а следовательно, общая нормаль к профилям совпадает с нормалью к траектории.

10. Другое замечательное следствие получим, если предположим, что движение фигуры F происходит таким образом, что профиль s постоянно проходит через неподвижную точку Ω . В этом случае сопряженный профиль γ сводится к одной только точке Ω ; вывод, который отсюда вытекает, заключается в следующем: *если профиль s , неразрывно связанный с фигурой F , проходит через неподвижную точку Ω , то нормаль к s в точке Ω (вообще меняющаяся от момента к моменту) содержит мгновенный центр вращения (относительного движения фигуры F , а следовательно, и кривой s).* К этому мы также придем непосредственно от теоремы Шаля, если рассмотрим взаимное движение.

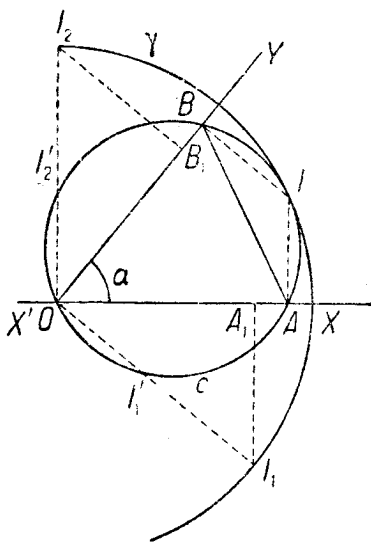
4. Примеры плоских твердых движений.

11. Прежде чем обратиться к дальнейшим выводам общего характера, рассмотрим несколько примеров разыскания полярных траекторий заданных плоских движений. К этого рода задачам мы приходим всякий раз, когда хотим механическим приспособлением осуществить то или иное заданное плоское твердое движение. Как мы видели, это всегда возможно выполнить (помимо чисто практических трудностей, на которых мы ниже также остановимся) качением одной из двух полярных траекторий по другой. В прикладной механике особый интерес имеют так называемые *эпициклические движения*, соответствующие тому случаю, когда обе траектории представляют собою окружность. Этими движениями мы займемся обстоятельно в § 8. Здесь же рассмотрим несколько примеров, в которых будем предполагать известной только последовательность положений движущейся фигуры, а не закон, которому движение следует во времени. Таким образом, по существу, речь будет идти о вопросах геометрии движения; если мы при этом будем иногда вводить

время t и кинематические понятия, то будем это делать только для удобства аргументации и словесного изложения.

12. **Прямолинейный стержень, скользящий по прямолинейным направляющим.** Представим себе прямолинейный стержень, схематически изображаемый прямолинейным отрезком AB , концы которого скользят по сторонам неподвижного угла $XOY = \alpha < \pi$ (фиг. 54).

Траекториями точек A и B , по предположению, служат полу-прямые OX и OY ; если поэтому AB есть произвольное положение стержня, то соответствующим полюсом I будет служить точка пересечения перпендикуляров, восстановленных из A и B к сторонам угла. Если рассматривать эти перпендикуляры как неограниченные прямые, то они образуют в точке I четыре угла, из которых два равны α , а два другие дополняют α до π . В положении, изображенном на рисунке, отрезки AI , BI образуют угол $AIB = \pi - \alpha$; четырехугольник $O A I B$ имеет два прямых угла при противоположных вершинах и, следовательно, вписывается в круг. Вследствие этого отрезок в этом своем положении виден из противоположного полюса под постоянным углом $\beta = \pi - \alpha$. Отсюда следует, что соответствующая ветвь рулетты (геометрическое место полюсов на плоскости, неразрывно связанной с AB) есть дуга окружности, идущая от точки A к точке B и имеющая угол β .



Фиг. 54.

Поскольку четырехугольник может быть вписан в окружность, то последняя (c) при любом положении стержня AB проходит через постоянную точку O . Вследствие же перпендикулярности хорд OA и AI (равно как OB и BI), точки O и I при любом положении отрезка AB расположены на окружности с диаметрально противоположно друг другу. Отсюда следует, что точка I все время остается от O на расстоянии, равном диаметру окружности c . Это значит: база рулетты есть дуга окружности γ , имеющей центр в точке O , и радиус, равный диаметру окружности c .

Легко видеть, как изменяются эти выводы, когда стержень AB переносится так, что угол при вершине A или B треугольника OAB становится прямым, а затем тупым. Отрезок AB виден тогда из I под углом α ; но геометрическое место точки на плоскости, неразрывно связанной с отрезком AB , т. е. соответствующая ветвь рулетты, все-таки принадлежит окружности c .

С другой стороны, для наблюдателя, остающегося неподвижным, крайние положения стержня AB получатся тогда, когда он расположится либо вдоль оси OX , либо вдоль OY ; в первом случае точка B находится в O , а A в A_1 , во втором случае точка A находится в O , а B в B_1 .

Полюс I_1 или I_2 , соответствующий первому или второму из этих положений, лежит на окружности в конце радиуса OI_1 или OI_2 , соответственно перпендикулярного к OY или OX , и притом с той же стороны прямой OX или соответственно OY ; таким образом базой твердого движения служит как раз дуга $\widehat{I_1 I_2}$ окружности γ , которой соответствует при центре угол $\pi - \alpha$, т. е. β .

Пусть I'_1 и I'_2 будут точки, в которых прямые OI_1 и OI_2 вторично пересекают окружность c . Дуга $\widehat{I'_1 I'_2}$ окружности c по длине равна дуге $\widehat{I_1 I_2}$ окружности γ , имеющей вдвое больший радиус, так как углы $\widehat{IOI'_1}$ и $\widehat{IOI_1}$, из которых один имеет вершину на окружности, а другой в центре ее, равны между собой. Отсюда следует, что дуга $\widehat{I'_1 I'_2}$ окружности c катится по дуге $\widehat{I_1 I_2}$ окружности γ . Совершенно также дуга $\widehat{I'_2 I'_1}$ катится по $\widehat{I_2 I_1}$.

Можно еще заметить, что треугольник $OA_1 I_1$ имеет прямой угол при вершине A_1 , — угол $\widehat{AOI_1}$ по абсолютной величине равен $\pi/2 - \alpha$; вследствие этого радиус OI_2 окружности γ , а следовательно, и диаметр окружности c выражаются формулой:

$$\frac{AB}{\sin \alpha}. \quad (2)$$

Теперь проведем полупрямую OX' , противоположную OX и представим себе, что стержень AB , продолжая свое движение по другую сторону рассмотренного уже положения OB_1 , скользит своим концом A по OX' , а концом B попережнему по OY .

Мы можем повторить предыдущее рассуждение, и в этой второй фазе движения базой и рулеткой будут служить дуги окружности; так как $\widehat{Y O X'} = \pi - \alpha$, радиус новой базы (или диаметр новой рулетки) будет равен:

$$\frac{AB}{\sin(\pi - \alpha)},$$

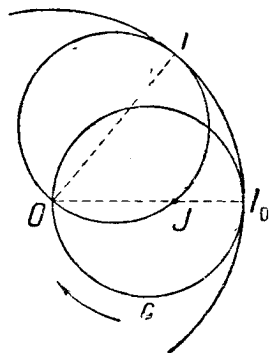
а потому не будет отличаться от радиуса прежней базы; таким образом полярными траекториями в этой фазе движения являются дуги тех же окружностей γ и c . Ясно также, что базой в этой второй фазе служит дуга окружности γ , меньшая полуокружности и расположенная между I_2 и точкой I_3 , диаметрально противоположной I_1 .

Если возьмем, далее, продолжение OY' оси OY и проследим за движением стержня AB внутри углов $X'OY'$ и $Y'OX'$, то придем к заключению, что все движение (с геометрической точки зрения, очевидно, периодическое) имеет полярными траекториями две окружности ϵ и γ ; рулетта ϵ все время катится по базе γ , имеющей вдвое больший радиус. Это — движение *эпициклическое*.

13. Обратное, каждое плоское твердое движение, которое сводится к тому, что окружность ϵ катится по внутренней стороне окружности γ вдвое большего радиуса, может быть многообразно осуществлено скольжением хорды подвижной окружности по двум прямым, проходящим через центр неподвижной окружности.

Предыдущая теорема будет доказана, если мы обнаружим, что при указанных условиях каждая точка подвижной окружности ϵ описывает в рассматриваемом движении диаметр неподвижной окружности γ (теорема Кардана)¹⁾.

С этой целью зафиксируем на окружности ϵ какую угодно точку и рассмотрим ее движение, начиная с момента, когда она находится на окружности γ , например в точке I_0 мгновенного соприкосновения обеих окружностей (фиг. 55). Покажем, что в другом положении окружности ϵ , в котором точкой ее соприкосновения с γ служит, скажем, I , зафиксированная на ϵ точка будет находиться в пересечении J окружности ϵ с радиусом OI_0 окружности γ . Иначе говоря, поскольку движение, по предположению, происходит без скольжения, дуга \widehat{JI} окружности ϵ имеет такую же длину, как и дуга $\widehat{I_0I}$ окружности γ . Действительно, легко заметить, что угол при центре окружности γ опирается на ее дугу $\widehat{I_0I}$, а как угол вписанный в окружность ϵ , опирается на дугу \widehat{JI} ; следовательно, угол при центре последней дуги вдвое больше $\widehat{I_0OI}$, т. е. угла при центре окружности γ , соответствующего дуге $\widehat{I_0I}$. Так как, по условию, радиус дуги \widehat{JI} представляет половину радиуса дуги $\widehat{I_0I}$, то мы отсюда непосредственно заключаем, что обе дуги имеют одинаковую длину. Из предыдущего доказательства следует, что за опорные прямые можно выбрать произвольные



Фиг. 55.

¹⁾ Джироламо Кардано (Girolamo Cardano) родился в Павии в 1501 г., умер в Риме в 1576 г., преподавал математику в Милане, а затем медицину в Павии и в Риме.

две прямые, проходящие через центр O ; в частности, можно взять две взаимно перпендикулярные прямые; в этом последнем случае хордой рулетты, концы которой по ней скользят, служит ее диаметр.

14. Теорема Кардана может быть доказана быстрее, если прибегнем к рассуждению кинематического характера. Траектория произвольной точки A окружности c должна быть такова, чтобы нормаль к ней в точке A в каждый момент проходила через мгновенный центр I (рубр. 4); касательная поэтому необходимо должна проходить через диаметрально противоположную точку окружности, т. е. через неподвижную точку O ; но линия, все касательные которой сходятся в одной точке O , не может быть не чем иным, как прямой, проходящей через точку O . Если это нуждается в доказательстве, то таковое может быть выполнено таким же рассуждением, как и в рубр. 50 гл. II; именно, радиус-вектор $\rho = OA$ и версор u касательной связаны соотношением

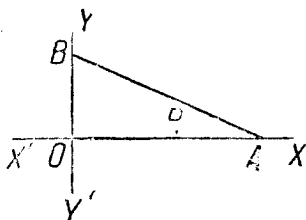
$$OA = \rho u;$$

дифференцируя его, получаем:

$$\dot{OA} = \dot{A} = \dot{\rho} u + \rho \dot{u}.$$

Однако, по условию, производная \dot{A} есть вектор, имеющий направление версора u , а вектор u либо перпендикулярен к u , либо равен нулю; поэтому, умножая обе части скалярно на \dot{u} , получаем $\rho u^2 = 0$, а следовательно, и $u = 0$, как это и требовалось доказать.

15. Эллипсограф. Движением, исследованным в предыдущих рубриках, можно воспользоваться для построения прибора, служащего для непрерывного черчения эллипса. Конструкция этого прибора основана на том, что при этого рода движении траектория точки, не принадлежащей рулетке, есть эллипс. Чтобы это доказать, нам достаточно рассмотреть тот случай (фактически применяемый в эллипсографах), когда обе опорные прямые взаимно перпендикулярны и, следовательно, скользящий по ним отрезок представляет собой диаметр рулетты. Выбрав опорные прямые за оси координат и взяв на отрезке AB или на одном из его продолжений произвольную точку P (фиг. 56), полагаем $AP = b$, $PB = a$ (считая при этом, например, отрезок AB ориентированным от A к B). Если через θ обозначим угол двух ориентированных прямых AB и OX , то



Фиг. 56.

$$x = -a \cos \theta, \quad y = b \sin \theta;$$

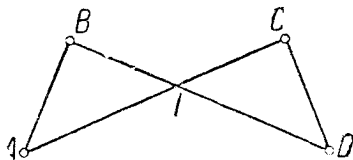
исключая отсюда θ , мы получим:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Вследствие этого чертящая точка, закрепленная на стержне AB или на одном из его продолжений, будет при движении стержня описывать на плоскости эллипс.

16. Движение, взаимное с тем, которое изучено в предыдущих рубриках, реализуется при помощи твердого угла (в частности наугольника), который движется в плоскости таким образом, что стороны его постоянно проходят через две неподвижные точки A и B . Тогда рулеткой служит окружность, которая катится по окружности половинного радиуса, остающейся внутри ее.

17. Сочлененный антипараллелограм. Под антипараллелограммом разумеют четырехугольник $ABCD$ с пересекающимися сторонами AC и BD (фиг. 57), в котором противоположные стороны равны ($AB=CD$ и $AC=BD$). Такой параллелограмм мы будем представлять себе сочлененным, т. е. составленным из твердых стержней, скрепленных в вершинах шарнирами.



Фиг. 57.

Если мы закрепим два шарнира, например A и B (концы стороны, которая не пересекается противоположной стороной CD), и будем вращать подвижные стержни (в их плоскости), то антипараллелограмм будет деформироваться, сохраняя, однако, неизменной длину каждой стороны.

Будем, в частности, рассматривать отрезок CD как движущуюся фигуру. Траекториями точек C и D служат окружности, имеющие центры в A и B ; следовательно (рубр. 4), мгновенным центром I служит точка пересечения прямых AC и BD .

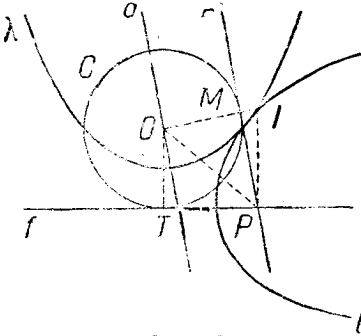
С другой стороны, треугольники IAB и IDC равны, так как, по самому определению антипараллелограмма, равны стороны AB и CD , углы при общей вершине I , а также углы при вершинах B и C (ср. треугольники ABD и ACD). Отсюда следует, что $IA=ID$ и $IB=IC$, а потому

$$IA + IB = IC + ID,$$

так как эти две суммы имеют постоянную длину (т. е. не зависящую от положения отрезка CD), равную общей длине стержней AC и BD . Отсюда мы можем заключить: полярные траектории λ и l суть равные эллипсы, имеющие фокусы в неподвижных вершинах A и B и в подвижных вершинах C и D .

Если мы закрепим такие вершины, как A и C (концы стороны, которая внутренне пересекается с противоположной стороной BD), то при помощи совершенно аналогичного рассуждения убедимся, что полярными траекториями служат ветви гиперболы, также равные между собой.

18. Дана окружность c и неподвижная прямая f , касающаяся окружности в точке T (фиг. 58). Прямолинейный профиль r движется, огибая окружность c таким образом, что некоторая его точка P скользит по прямой. Обозначим через M точку касания окружности c и прямой r . Мы можем немедленно разыскать мгновенный центр I , как точку пересечения перпендикуляра к прямой в точке P (рубр. 4) с радиусом OM . Если проведем прямую OP ,



Фиг. 58.

то она разделит угол \widehat{TPM} пополам, и ясно, что треугольник OIP имеет при вершинах O и P равные углы. В самом деле, угол при вершине I представляет собою дополнение угла \widehat{OPT} до прямого, а угол при вершине O (принадлежащей также прямоугольному треугольнику OMP) дополняет до прямого угол \widehat{OPM} , который равен \widehat{OPT} . Отсюда следует, что точка I одинаково удалена от точки O и от P или, если угодно,

от неподвижной точки O и неподвижной прямой f . Это свойство точки (независимо от частного положения подвижного профиля) характеризует описываемое ею геометрическое место (т. е. базу), как параболу, имеющую фокусом точку O и директриссой прямую f .

С такой же легкостью мы обнаружим, что рулетка l также представляет собой параболу, равную своей базе, но имеющую фокусом точку P , директриссой прямую d , проходящую через центр O , параллельно r ; это вытекает из того, что точка I равноудалена от точек P и O или, что то же, от точки P и прямой d .

5. Эпидециклические методы черчения сопряженных профилей.

19. Определение сопряженных профилей (рубр. 7) может быть непосредственно использовано для их действительного вычерчивания; из него можно вывести практические правила нанесения точек одного из двух профилей, когда дан другой и известны полярные траектории l и λ . Мы, однако, не будем здесь на этом останавливаться, но вместо этого укажем симметрический прием, который по данным траекториям l и λ воспроизводит, так сказать, автоматически пары сопряженных профилей.

Этот прием называется *эпидециклическим*, потому что он специально употребляется в том случае, когда обе траектории l и λ суть окружности (рубр. 11).

Положим, что на плоскости зафиксирована произвольная кри-