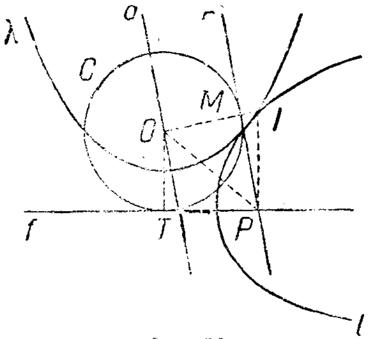
18. Дана окружность c и неподвижная прямая f, касающаяся окружности в точке T (фиг. 58). Прямолинейный профиль r движется, огибая окружность c таким образом, что некоторая его точка P скользит по прямой. Обозначим через M точку касания окружности c и прямой r. Мы можем немедленно разыскать мгновенный центр I, как точку пересечения перпендикуляра к прямой в точке P (рубр. 4) с радиусом OM. Если проведем прямую OP, то она разделит угол $\widehat{TPM}$ пополам, и ясно, что треугольник OIP имеет при вершинах O и P равные углы. В самом деле, угол при вершине P представляет собою дополнение угла $\widehat{OPT}$ до прямого, а угол при вершине O (принадлежащей также прямоугольному треугольнику OMP) дополняет до прямого угол $\widehat{OPM}$, который равен $\widehat{OPT}$. Отсюда следует, что точка I одинаково удалена от точки O и от P или, если угодно, от неподвижной точки O и неподвижной прямой f. Это свойство точки (независимо от частного положения подвижного профиля) характеризует описываемое ею геометрическое место (т. е. базу), как параболу, имеющую фокусом точку O и директриссой прямую f.



Фиг. 58.

С такой же легкостью мы обнаружим, что рулетта l также представляет собой параболу, равную своей базе, но имеющую фокусом точку P, директриссой прямую d, проходящую через центр O, параллельно r; это вытекает из того, что точка I равноудалена от точек P и O или, что то же, от точки P и прямой d.

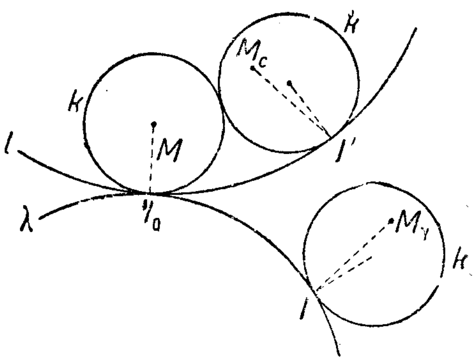
5. Эпициклические методы черчения сопряженных профилей.

19. Определение сопряженных профилей (рубр. 7) может быть непосредственно использовано для их действительного вычерчивания; из него можно вывести практические правила нанесения точек одного из двух профилей, когда дан другой и известны полярные траектории l и λ. Мы, однако, не будем здесь на этом останавливаться, но вместо этого укажем симметрический прием, который по данным траекториям l и λ воспроизводит, так сказать, автоматически пары сопряженных профилей.

Этот прием называется *эпициклическим*, потому что он специально употребляется в том случае, когда обе траектории l и λ суть окружности (рубр. **11**).

Положим, что на плоскости зафиксирована произвольная кривая k, которая при данном положении полярных траекторий касается обеих в точке их соприкосновения I_0 (мгновенный центр вращения). Исходя из этого положения, будем катать k, как твердую кривую один раз по рулетте l, другой раз по базе λ.

Произвольная точка M, неразрывно связанная с k, описывает при первом качении дугу кривой c, при втором — дугу сопряженной кривой γ; при этом друг другу соответствуют те точки M_c и M_γ, которые представляют положения точки M на подвижной фигуре и в плоскости движения, после того как кривая k прокатится по l и по λ на одинаковое расстояние, считая с положения I_0. Доказательство, можно сказать, непосредственно напрашивается.



Фиг. 59.

В самом деле, пусть I и I' (фиг. 59) будут точки соприкосновения кривой k соответственно с λ и l в этих двух ее положениях (на фигуре и на неподвижной плоскости). По теореме Шаля (рубр. 4) прямые $I'M_c$ и IM_γ нормальны к траекториям точки M, т. е. к кривым c и γ. С другой стороны, когда кривая l находится в соприкосновении с λ в точке I, вследствие равенства дуг $\overset{\frown}{I_0I'}$ и $\overset{\frown}{I_0I}$ точка I' необходимо должна попасть в I. Вместе с тем, кривая k, соприкасаясь в точке I' с l, непременно приходит в совмещение с конгруентной кривой k, касающейся λ в точке I. Вследствие этого, в частности, совпадают точки M_c и M_γ, а вместе с тем и нормали $I'M_c$ и IM_γ. Таким образом кривые c и γ постоянно имеют в общей точке общую нормаль, а потому и общую касательную. Этим свойством характеризуются два сопряженные профиля.

20. Рассмотрение сопряженных профилей имеет особенно важное значение с точки зрения приложений. В самом деле, когда нужно осуществить данное плоское движение, то способ образования его, который теоретически представляется наиболее простым (при помощи полярных траекторий), далеко не всегда соответствует практическим требованиям. Часто существует специальный профиль c подвижной фигуры, который целесообразнее всего поддерживать в соприкосновении с неподвижным профилем γ. Мы имеем, таким образом, дело с двумя сопряженными профилями. Однако, чтобы вполне определить геометрический ход движения, в этом случае недостаточно, как при полярных траекториях, указать два профиля. Чтобы выяснить этот существенный пункт, припомним, что мгновенное движение кривой c всегда представляет собой вращение вокруг полюса I; однако этот полюс вообще не совпадает с точкой соприкосновения M. Вследствие этого соприкосновение не происходит, так сказать, равными шагами, т. е. точка соприкосновения не описывает равных дуг на кривых c и γ, как это имеет место при чистом качении; здесь происходит некоторое дополнительное смещение $d\sigma$ профиля c по γ, которое называется *скольжением одного профиля по другому.*

Как мы видели в рубр. 8, относя смещение к элементу времени dt, будем иметь:

$$dc = \boldsymbol{v}_r dt, \quad d\gamma = \boldsymbol{v}_a dt \text{ и } d\sigma = \boldsymbol{v}_\tau dt,$$

где dc есть смещение точки M по кривой c, $d\gamma$ — смещение той же точки по кривой γ, а $\boldsymbol{v}_\tau$ — скорость переноса.

Векторное соотношение $\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_r + \boldsymbol{v}_\tau$ дает:

$$d\gamma = dc \pm d\sigma,$$

причем тот или другой знак нужно взять в зависимости от того, в какую сторону обращено скольжение. Как видим, когда заданы профили c и γ, нужно, прежде всего, определить смещение профиля c, которое производится качением его по γ; но этого недостаточно, чтобы установить последовательные положения кривой c; нужно еще определить, в каком размере и в какую сторону происходит скольжение точки соприкосновения.

Можно еще отметить, что при надлежащих соглашениях относительно сторон обращения и знаков приведенному выше диференциальному соотношению можно придать общую форму для любого соприкосновения профилей в точке M и при любом относительном положении мгновенного центра.

21. В заключение приведем еще соображение механического характера относительно материального осуществления плоского движения при помощи двух сопряженных профилей c и γ.

Помимо большей теоретической простоты осуществление движения при помощи полярных траекторий имеет еще то преимущество, что этим путем устраняется пассивное влияние, обусловливаемое *трением скольжения*, которое играет тем большую роль (т. е. требует тем большей работы для преодоления сопротивления), чем значительнее скольжение профилей. Между тем, когда эти кривые совпадают с полярными траекториями, то имеет место только трение качения, действие которого гораздо слабее (гл. XIII). С другой стороны, скольжение $d\sigma$ пропорционально расстоянию точки соприкосновения от полюса (рубр. 4); если поэтому те или иные практические соображения заставляют отказаться от того, чтобы кривые c и γ совпадали с полярными траекториями, то во всяком случае нужно стараться выбрать их в возможно меньшем удалении от последних.