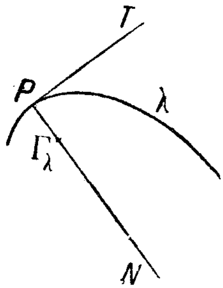
6. Движение полюса по полярным траекториям.

22. Возвращаясь к соображениям общего характера, мы займемся здесь изучением закона, по которому в плоском твердом движении полюс движется по базе и по рулетте.

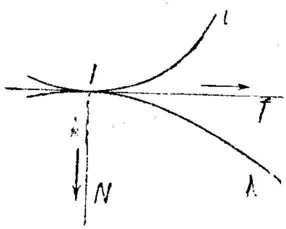
Для этой цели будет полезно рассмотреть, прежде всего, специальную категорию плоских твердых движений. Пусть будет дана плоская кривая λ (фиг. 60); рассмотрим плоское твердое движение, которое определяется прямым углом $\widehat{TPN}$, реализуемым при помощи наугольника; вершина этого угла P движется по кривой λ по какому угодно временному закону, а сторона PT все время направлена по касательной к кривой; таким образом прямая PN всегда будет нормальна к кривой. Так как λ есть траектория точки P, принадлежащей к подвижной системе, то полюс в каждый момент лежит на прямой PN (рубр. 4). Более того, так как он представляет собой предельное положение пересечения прямой PN с бесконечно близкой нормалью, то он совпадает с центром кривизны Γ_λ кривой λ в точке P. Таким образом мы заключаем, что в рассматриваемом движении рулеттой служит *нормаль* PN, а базой — *эволюта* кривой λ (т. е. геометрическое место ее центров кривизны).



Фиг. 60.

Обратно, если будем рассматривать взаимное движение, т. е. такое, которое совершает неизменяемая плоская кривая λ, двигающаяся в своей плоскости таким образом, что она постоянно проходит через неподвижную точку P и касается в этой точке неподвижной прямой PT, то рулеттой будет служить эволюта кривой λ, а базой перпендикуляр PN к неподвижной прямой в точке P.

23. Установив все это, вернемся к произвольному плоскому движению; рассмотрим движение прямого угла, составленного касательной IT и нормалью IN к базе λ в мгновенном полюсе (фиг. 61); при этом надо установить соглашение относительно стороны обращения каждой из этих двух прямых.



Фиг. 61.

Это вспомогательное движение прямого угла $\widehat{TIN}$ можно рассматривать с двух точек зрения: a) непосредственно и b) как образованное данным твердым движением кривой l по λ в качестве переносного движения и скольжением касательной IT вдоль l в качестве относительного движения.

С точки зрения a) вспомогательное движение, вследствие соображений предыдущей рубрики, имеет полюсом центр кривизны Γ_λ кривой λ и определенную угловую скорость; если обозначим через u единичный вектор, перпендикулярный к двум ориентированным прямым IT и IN и обращенный относительно них в правую сторону, то угловую скорость можно будет представить в виде $\omega_\lambda u$, где ω_λ есть скаляр определенного знака. С точки зрения b) вспомогательное движение можно считать составленным из двух движений: именно 1) из данного твердого движения, с мгновенным полюсом в точке I и некоторой угловой скоростью относительно неподвижной плоскости π (эту угловую скорость поэтому можно представить в виде ωu) и 2) из движения прямой IT по кривой l, для которого мгновенным центром служит центр кривизны C_l кривой l, а угловая скорость вновь имеет вид $\omega_l u$.

Отсюда мы заключаем (III, рубр. 27), что совокупность двух параллельных векторов ωu и $\omega_l u$, приложенных соответственно в точках I и C_l, эквивалентна одному вектору $\omega_\lambda u$, приложенному в точке Γ_λ; сравнивая эти результаты, получаем:

$$\omega_\lambda = \omega_l + \omega; \tag{3}$$

приравнивая результирующие моменты относительно точки I и замечая, что расстояния $\Gamma_\lambda I$ и $C_l I$ представляют собою не что иное, как радиусы кривизны ρ_λ и r_l кривых λ и l (взятые с надлежащими знаками), найдем:

$$\rho_\lambda \omega_\lambda = r_l \omega_l.$$

Общее значение этих двух произведений представляет собою не что иное, как (скалярную) скорость v_I полюса I как по кривой λ, так и по l (взятую со знаком, соответствующим принятой на IT положительной стороне обращения), мы получим, таким образом:

$$\omega_\lambda = \frac{v_I}{\rho_\lambda}, \quad \omega_l = \frac{v_I}{r_l};$$

подставляя же эти выражения в равенство (3), найдем окончательно:

$$\omega = v_I \left(\frac{1}{\rho_\lambda} - \frac{1}{r_l} \right). \tag{4}$$

Эта формула дает возможность вычислить скалярное значение скорости движения мгновенного центра по полярным траекториям по данной угловой скорости, и обратно.

Если через θ обозначим угол, ориентирующий подвижную плоскость, т. е. аномалию, которую прямая, связанная с движущейся плоскостью, образует с некоторой прямой на неподвижной плоскости, то естественно

$$\omega = \frac{d\theta}{dt};$$

с другой стороны, если через $d\lambda$ обозначим элемент базы, присваивая ему в надлежащую сторону положительный знак, то можем положить:

$$v_I = \frac{d\lambda}{dl};$$

откуда

$$\frac{\omega}{v_I} = \frac{d\theta}{d\lambda};$$

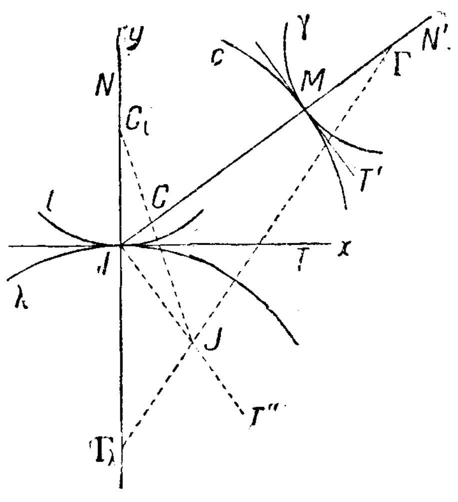
вместе с тем соотношение (4) принимает вид:

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{1}{\rho_\lambda} - \frac{1}{r_l}; \tag{5}$$

это — формула чисто геометрическая: элементы кинематические вовсе исчезли.

7. Геометрическая теорема и формула Савари.

24. Взаимные положения центров кривизны двух сопряженных профилей и мгновенного центра вращения связаны замечательной зависимостью, которую мы намерены здесь вывести.



Фиг. 62.

Рассматривая вновь некоторое плоское движение, обозначим, как обыкновенно, через F — подвижную фигуру, через l и λ — полярные траектории и через C и γ — какие-либо два сопряженные профиля (фиг. 62). На нашем рисунке изображены кривые λ и γ и для некоторого определенного положения фигуры F также кривые l и c, соприкасающиеся с λ и γ соответственно в мгновенном центре I и в точке M.

Пусть IT и IN будут касательная и нормаль, общие для траекторий l и λ в точке I; MT' и MN' пусть будут касательная и нормаль, общие к сопряженным профилям в точке M.

При движении фигуры F, вообще говоря, меняется относительное положение этих двух пар ортогональных прямых IT, IN и MT', MN', которые мы для краткости будем соответственно обозначать через Φ и Φ'.

Это движение мы можем рассматривать с трех различных точек зрения: 1) непосредственно, как оно происходит; 2) как образованное (переносным) движением профиля c по отношению