сваивая ему в надлежащую сторону положительный знак, то можем положить:

$$v_I = \frac{d\lambda}{dt};$$

откуда

$$\frac{\omega}{v_I} = \frac{d\theta}{d\lambda};$$

вместе с тем соотношение (4) принимает вид:

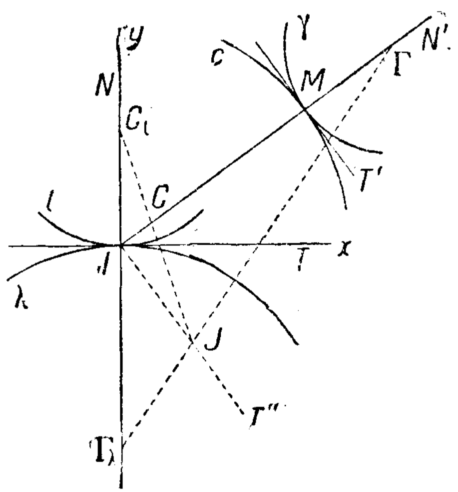
$$\frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{1}{\rho_\lambda} - \frac{1}{r_l}; \qquad (5)$$

это — формула чисто геометрическая: элементы кинематические вовсе исчезли.

7. Геометрическая теорема и формула Савари.

24. Взаимные положения центров кривизны двух сопряженных профилей и мгновенного центра вращения связаны замечательной зависимостью, которую мы намерены здесь вывести.

Рассматривая вновь некоторое плоское движение, обозначим, как обыкновенно, через F — подвижную фигуру, через l и λ — полярные траектории и через C и γ — какие-либо два сопряженные профиля (фиг. 62). На нашем рисунке изображены кривые λ и γ и для некоторого определенного положения фигуры F также кривые l и c, соприкасающиеся с λ и γ соответственно в мгновенном центре I и в точке M.



Фиг. 62.

Пусть IT и IN будут касательная и нормаль, общие для траекторий l и λ в точке I; MT' и MN' пусть будут касательная и нормаль, общие к сопряженным профилям в точке M.

При движении фигуры F, вообще говоря, меняется относительное положение этих двух пар ортогональных прямых IT, IN и MT', MN', которые мы для краткости будем соответственно обозначать через Φ и Φ'.

Это движение мы можем рассматривать с трех различных точек зрения: 1) непосредственно, как оно происходит; 2) как образованное (переносным) движением профиля c по отношению к Ф и (относительным) движением осей Ф′ относительно c; 3) как образованное (переносным) движением профиля γ по отношению к осям Ф и (относительным) движением осей Ф′ по отношению к γ [1]).

Каждая из этих точек зрения, как мы увидим, приводит к некоторому свойству положения мгновенного центра J системы Ф′ относительно Ф. Сопоставление этих свойств, в свою очередь, непосредственно приводит к результату, который мы имеем в виду получить.

25. С первой точки зрения, мы непосредственно замечаем, что точка J лежит на прямой IT'', проведенной через I параллельно MT''.

В самом деле, MN' представляет собой прямую, неразрывно связанную с Ф′; эта прямая, будучи общей нормалью к сопряженным профилям c и γ, постоянно проходит через I. И так как I является некоторой определенной точкой Ф, то мгновенный центр J должен находиться на перпендикуляре к MN', или, что то же, на прямой, параллельной к MT' и проходящей через I.

Переходя теперь ко второй и к третьей точкам зрения, целесообразно припомнить соображения рубр. 22. Применяя сначала вторую точку зрения, заметим, что при движении осей Ф′ относительно c мгновенный центр вращения совпадает с центром кривизны C кривой c; при движении же кривой c, которое совпадает с движением неразрывно связанной с ней кривой l относительно осей Ф, аналогичный центр совпадает с центром C_l рулетты. Вследствие этого в результирующем движении осей Ф′ относительно Ф мгновенный центр вращения лежит на прямой CC_l [2]).

Исходя из третьей точки зрения, мы совершенно таким же образом заключаем, что точка J лежит на прямой $\Gamma\Gamma_\lambda$, где Γ — центр кривизны профиля γ, а Γ_λ — центр кривизны базы λ.

Учитывая установленные таким образом три свойства точки J, мы прямо приходим к следующей теореме Савари [3]).

Так называемая формула Савари была, строго говоря, дана раньше Эйлером.

---

[1]) Когда речь идет о движении по отношению к кривой, то под этим нужно, конечно, разуметь движение относительно плоскости, которая с этой кривой неразрывно связана. (*Ред.*)

[2]) Чтобы оправдать это утверждение, заметим, что всякое состояние плоского движения (имеющего мгновенный центр на конечном расстоянии) можно рассматривать, как вращение вокруг некоторой прямой, перпендикулярной к плоскости движения. Вследствие этого, когда два плоские движения происходит совместно (с мгновенными центрами на конечном расстоянии), то составленное движение также имеет характер вращения (III, рубр. 27), ось которого лежит в плоскости осей составляющих вращений. Поэтому пересечения трех осей с плоскостью движения, т. е. мгновенные центры трех вращений, расположены на одной прямой.

[3]) Ф. Савари (Felix Savary) родился в Париже в 1797 г., умер в Эстажели (Estagel, Восточные Пиренеи) в 1841 г., состоял профессором астрономии и геодезии в политехнической школе. Доказательство геометрической теоремы, приведенной в тексте, было дано Кенигсом (Königs, см. „Bulletin des sciences mathématiques", т. XXXI, 1907).

Если C и Γ суть центры кривизны произвольных двух сопряженных профилей в соответственных точках, а C_l и Γ_λ — центры кривизны двух полярных траекторий, то прямые CC_l и $\Gamma\Gamma_\lambda$ пересекаются в точке J, принадлежащей прямой IT'', которая проходит через мгновенный центр I параллельно общей касательной двух профилей.

26. К этому результату конструктивного характера присоединяется замечательное метрическое соотношение между радиусами кривизны. Чтобы притти к этому соотношению наиболее кратким путем и притом соединить в одной формуле всевозможные случаи, не разбирая на рисунках отдельно различные возможные здесь комбинации, целесообразно воспользоваться средствами аналитической геометрии.

За оси координат x и y примем наши две взаимно перпендикулярные прямые IT и IN, ориентированные согласно этому их обозначению; стороны обращения осей, таким образом, первоначально выбраны совершенно произвольно. Далее, примем IM за положительную сторону общей нормали к сопряженным профилям; наконец, обозначим через α аномалию этой полупрямой относительно оси x и через δ расстояние IM. Теперь через r и ρ обозначим радиусы кривизны кривых c и γ, т. е. отрезки MC и $M\Gamma$, *взятые с надлежащими знаками* относительно стороны обращения IM, принятой за положительную на общей нормали обоих профилей. Вместе с тем $r+\delta$, $\rho+\delta$ выражают по величине и знаку отрезки $IC = IM + MC$, $I\Gamma = IM + M\Gamma$; вследствие этого их компоненты, т. е. координаты x, y точек C и Γ, выразятся соответственно следующими формулами:

$$x = (r+\delta)\cos\alpha,\quad y = (r+\delta)\sin\alpha \text{ для точки } C,$$

$$x = (\rho+\delta)\cos\alpha,\quad y = (\rho+\delta)\sin\alpha \text{ для точки } \Gamma.$$

Что касается центров кривизны C_l и Γ_λ двух полярных траекторий, которые оба расположены на прямой IN, т. е. на оси y, то мы обозначим соответствующие ординаты через r_l и ρ_λ; по существу, это радиусы кривизны двух кривых, взятые с надлежащими знаками относительно стороны обращения IN, принятой на нормали за положительную.

При этих условиях уравнения прямых CC_l и $\Gamma\Gamma_\lambda$, соединяющих точки

$$(r+\delta)\cos\alpha,\ (r+\delta)\sin\alpha \text{ и } 0, r_l$$

и соответственно

$$(\rho+\delta)\cos\alpha,\ (\rho+\delta)\sin\alpha \text{ и } 0, \rho_\lambda,$$

имеют вид:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ (r+\delta)\cos\alpha & (r+\delta)\sin\alpha & 1 \\ 0 & r_l & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ (\rho+\delta)\cos\alpha & (\rho+\delta)\sin\alpha & 1 \\ 0 & \rho_\lambda & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Радиусы кривизны r_l и ρ_λ мы, естественно, можем считать отличными от нуля (мы можем ограничиться кривыми, которые имеют правильное изгибание в точках, о которых идет речь); более того, мы первоначально предположим, что не обращаются в нуль ни $r+\delta$, ни $\rho+\delta$. Мы должны будем вследствие этого разобрать по окончательной формуле, что происходит, когда $r+\delta$ или $\rho+\delta$ обращается в нуль, т. е., когда одна из точек C или Γ совпадает с мгновенным центром I.

После этих ограничений мы можем разделить первое уравнение на $r_l(r+\delta)$, а второе на $\rho_\lambda(\rho+\delta)$; положив затем для краткости

$$q=\frac{1}{r+\delta}-\frac{\sin\alpha}{r_l},$$

$$\chi=\frac{1}{\rho+\delta}-\frac{\sin\alpha}{\rho_\lambda},$$

мы приведем наши два уравнения к виду:

$$qx+\cos\alpha\left(\frac{y}{r_l}-1\right)=0,$$

$$\chi x+\cos\alpha\left(\frac{y}{\rho_\lambda}-1\right)=0;$$

вычитая их теперь почленно, получим уравнение

$$(q-\chi)x+\cos\alpha\left(\frac{1}{r_l}-\frac{1}{\rho_\lambda}\right)y=0$$

прямой, соединяющей начало I с точкой пересечения J рассмотренных выше прямых.

Так как по геометрической теореме Савари эта прямая должна быть перпендикулярна к прямой IM, угловым коэфициентом которой служит $\operatorname{tg}\alpha$, то

$$\sin\alpha(q-\chi)=\cos^2\alpha\left(\frac{1}{r_l}-\frac{1}{\rho_\lambda}\right);$$

принимая же во внимание значение q и χ, получим:

$$\sin\alpha\left(\frac{1}{r+\delta}-\frac{1}{\rho+\delta}\right)=\frac{1}{r_l}-\frac{1}{\rho_\lambda}; \tag{6}$$

это и есть формула Савари.

Припомним, что правая часть этого равенства, согласно соотношению (5), отличается только знаком от производной $d\theta/d\lambda$, где θ есть угол, ориентирующий положение подвижной фигуры.

Заметим, наконец, что в том случае, когда какая-либо из четырех кривых l, λ, c, γ обращается в прямую, соответствующий радиус кривизны становится бесконечно большим (кривизна обращается в нуль), и один из членов формулы (8) выпадает (тот, в котором фигурирует этот радиус); но $\frac{1}{r_l}$ и $\frac{1}{\rho_\lambda}$ не могут тождественно совместно обратиться в нуль, потому что обе полярные траектории не могут быть прямолинейными, поскольку речь идет о действительном качении.

27. При выводе соотношения (6) мы заранее исключили случай, когда обращается в нуль хотя бы одна из сумм $r+\delta$ или $\rho+\delta$. Но ничто не мешает допустить, что тот или иной из отрезков IC или $I\Gamma$ отличается от нуля сколь угодно мало. Положим сначала, что $\sin\alpha \neq 0$. Если тогда одна из этих сумм стремится к нулю, то соотношение (6) обнаруживает, что и другая стремится к нулю. Переходя к пределу, мы получаем следующий вывод: *если центр кривизны одного из двух профилей падает в точку I* (что соответствует уничтожению бинома $r+\delta$ или $\rho+\delta$), *то в ту же точку падает центр кривизны сопряженного профиля.*

Ограничение $\sin\alpha \neq 0$ выражает, что общая нормаль в сопряженных профилях не совпадает с общей касательной к полярным траекториям. Чтобы от него освободиться, достаточно в установленном только что выводе, справедливом при $\sin\alpha \neq 0$, перейти к пределу в предположении, что $\sin\alpha$ стремится к нулю; это соотношение при этом остается без изменения, так как угол α в нем вовсе не фигурирует.

К тому же выводу можно было бы притти, исходя прямо из геометрической теоремы Савари, т. е. из того факта, что прямые CC_l, $\Gamma\Gamma_\lambda$, IT'' проходят через одну и ту же точку.

28. Дальнейшее следствие мы получим, если предположим, как в рубр. **9**, что кривая *c* сводится к одной только точке P подвижной фигуры. В этом случае r обращается в нуль, а потому точка C совпадает с P; кривая γ есть траектория точки P, соотношение (6) служит для определения радиуса кривизны ρ траектории произвольной точки P фигуры в функции от δ, α, r_l и ρ_λ; все эти величины непосредственно известны, коль скоро задано движение фигуры и положение точки P на ней.

С точки зрения конструктивной, это приводит к следующему эквивалентному выводу: *центр кривизны Γ траектории γ в произвольной точке P определяется пересечением нормали с прямой $\Gamma_\lambda J$, где J, в свою очередь, представляет собой пересечение прямой Pl с параллелью IT'' к касательной к кривой γ в точке P.*

8. Эпициклическое движение.

29. Согласно определению, данному в рубр. **11**, плоское движение является эпициклическим, если как рулеттой, так и базой служат окружности. Траектории, описываемые отдельными точками подвижной фигуры, называются в этом случае *эпициклоидами*; мы займемся, прежде всего, изучением этих кривых.