

дает (тот, в котором фигурирует этот радиус); но  $\frac{1}{r_1}$  и  $\frac{1}{r_2}$  не могут тождественно совместно обратиться в нуль, потому что обе полярные траектории не могут быть прямолинейными, поскольку речь идет о действительном качении.

27. При выводе соотношения (6) мы заранее исключили случай, когда обращается в нуль хотя бы одна из сумм  $r + \delta$  или  $\rho + \delta$ . Но ничто не мешает допустить, что тот или иной из отрезков  $IC$  или  $IT$  отличается от нуля сколь угодно мало. Положим сначала, что  $\sin \alpha \neq 0$ . Если тогда одна из этих сумм стремится к нулю, то соотношение (6) обнаруживает, что и другая стремится к нулю. Переходя к пределу, мы получаем следующий вывод: *если центр кривизны одного из двух профилей падает в точку  $I$  (что соответствует уничтожению бинорма  $r + \delta$  или  $\rho + \delta$ ), то в ту же точку падает центр кривизны сопряженного профиля.*

Ограничение  $\sin \alpha \neq 0$  выражает, что общая нормаль в сопряженных профилях не совпадает с общей касательной к полярным траекториям. Чтобы от него освободиться, достаточно в установленном только что выводе, справедливом при  $\sin \alpha \neq 0$ , перейти к пределу в предположении, что  $\sin \alpha$  стремится к нулю; это соотношение при этом остается без изменения, так как угол  $\alpha$  в нем вовсе не фигурирует.

К тому же выводу можно было бы прийти, исходя прямо из геометрической теоремы Савари, т. е. из того факта, что прямые  $CS$ ,  $IT$ ,  $IT''$  проходят через одну и ту же точку.

28. Дальнейшее следствие мы получим, если предположим, как в рубр. 9, что кривая  $c$  сводится к одной только точке  $P$  подвижной фигуры. В этом случае  $r$  обращается в нуль, а потому точка  $C$  совпадает с  $P$ ; кривая  $\gamma$  есть траектория точки  $P$ , соотношение (6) служит для определения радиуса кривизны  $\rho$  траектории произвольной точки  $P$  фигуры в функции  $\text{ord}$ ,  $\alpha$ ,  $r_1$  и  $r_2$ ; все эти величины непосредственно известны, коль скоро задано движение фигуры и положение точки  $P$  на ней.

С точки зрения конструктивной, это приводит к следующему эквивалентному выводу: *центр кривизны  $\Gamma$  траектории  $\gamma$  в произвольной точке  $P$  определяется пересечением нормали с прямой  $\Gamma_\lambda J$ , где  $J$ , в свою очередь, представляет собой пересечение прямой  $PI$  с параллелью  $IT''$  к касательной к кривой  $\gamma$  в точке  $P$ .*

## 8. Эпициклическое движение.

29. Согласно определению, данному в рубр. 11, плоское движение является эпициклическим, если как рулеткой, так и базой служат окружности. Траектории, описываемые отдельными точками подвижной фигуры, называются в этом случае *эпициклоидами*; мы займемся, прежде всего, изучением этих кривых.

Для определенности будем предполагать, что рулетка  $l$  имеет с базой  $\lambda$  внешнее касание.

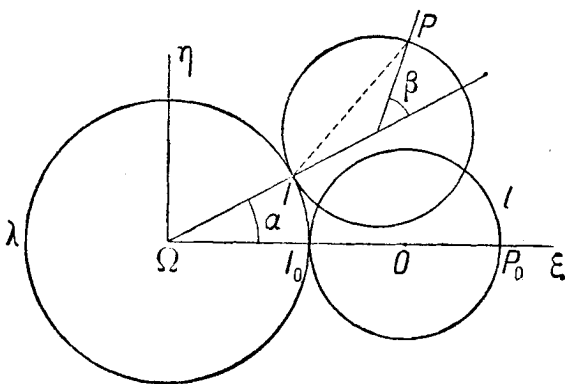
Пусть  $a$  и  $b$  будут радиусы окружностей  $l$  и  $\lambda$ ,  $O$  и  $\Omega$  — соответствующие центры их (фиг. 63). Пусть  $P$  будет произвольная точка подвижной фигуры, с которой неразрывно связана окружность  $l$ , а  $r$  пусть будет расстояние точки  $P$  от центра  $O$  окружности  $l$ .

Когда окружность  $l$  катится, то радиус  $OP$  принимает всевозможные направления.

Остановимся на том положении рулетки, при котором две полупрямые  $OP$  и  $O\Omega$  представляют собой продолжения одна другой; через  $I_0$  обозначим мгновенный центр, соответствующий этому положению; четыре точки  $\Omega$ ,  $I_0$ ,  $O$ ,  $P$  расположены на одной прямой в том порядке, как мы их называем. Установленный таким образом радиус базы примем за ось  $\Omega$ , и к ней присоединим в качестве второй оси перпендикуляр  $\Omega\eta$ .

Рассмотрим теперь произвольное другое положение окружности  $l$ .

Пусть  $\alpha$  будет угол, который радиус  $O\Omega$  в этом втором положении образует с осью абсцисс  $\Omega\xi$ ; этот угол мы будем считать положительным в сторону возрастающих аномалий, т. е. от оси  $\Omega\xi$  к  $\Omega\eta$ .



Фиг. 63.

Пусть, далее,  $I$  будет мгновенный центр, соответствующий второму положению. Радиус  $OP$  после поворота отклонится от  $OI$  в том же направлении на угол  $\beta$ , который легко выразить через  $\alpha$ . В самом деле,  $a|\beta|$  выражает длину смещения точки касания по окружности  $l$ ;  $b|\alpha|$  выражает длину ее смещения по окружности  $\lambda$ . А так как одна окружность катится по другой без скольжения, то эти дуги равны между собой; их знаки, в силу наших соглашений, совпадают.

Поэтому

$$\alpha\beta = b\alpha.$$

30. Исходя из этого, мы непосредственно получаем выражения для координат  $\xi$  и  $\eta$  точки  $P$  при произвольном положении рулетки, а вместе с тем и параметрические уравнения ее траекторий; для этого достаточно спроектировать на оси координат обе части векторного тождества

$$\overline{QP} = \overline{QO} + \overline{OP}.$$

Если теперь примем во внимание, что вектор  $\overline{OQ}$  имеет длину (постоянную)  $a + b$  и аномалию (переменную)  $\alpha$ , вектор же  $\overline{O'P}$  имеет длину (также постоянную)  $p$  и переменную аномалию

$$\alpha + \beta = \left(1 + \frac{b}{a}\right)\alpha,$$

то найдем непосредственно:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= (a + b) \cos \alpha + p \cos k\alpha, \\ \eta &= (a + b) \sin \alpha + p \sin k\alpha, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где через  $k$  для краткости обозначена постоянная  $1 + \frac{b}{a}$ .

Уравнения (7), очевидно, представляют собой параметрические уравнения траекторий точки  $P$ , они определяют координаты  $\xi$  и  $\eta$  произвольной точки этой кривой через один переменный параметр  $\alpha$ , так как  $a$ ,  $b$ ,  $p$  имеют постоянные положительные значения, первоначально совершенно произвольные, а  $k = 1 + \frac{b}{a}$ .

Обыкновенную эпициклоиду, т. е. траекторию точки, лежащей на самой катящейся окружности, получим, если положим  $p = a$ . Рисунок, помещенный в следующей рубрике, содержит изображения трех типов эпициклоиды: удлиненной, обыкновенной и укороченной.

31. Прежде всего, отметим одну особенность качественного свойства, принадлежащую эпициклоидам всех трех типов. Каждая эпициклоида составляется из ряда (вообще бесконечного) конгруэнтных между собой дуг, которые называются ветвями эпициклоиды. Чтобы составить себе ясное представление о такой ветви, нужно проследить катящуюся окружность с ее начального положения (соприкосновения в точке  $I_0$ ) до того момента, когда та же точка окружности  $l$  вновь приходит в соприкосновение с базой (фиг. 64). При этих условиях  $\beta = 2\pi$ ; а так как  $ba = a\beta$ , то мы получаем для  $\alpha$  значение:

$$2\pi \frac{a}{b} = \frac{2\pi}{k-1}.$$

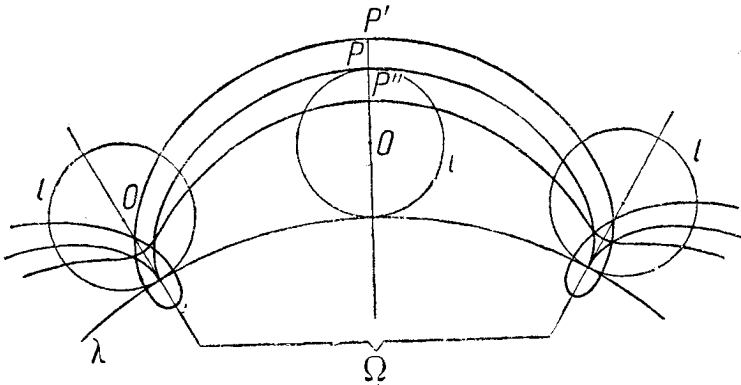
Это значит, что за промежуток времени, в течение которого окружность  $l$  совершает полный оборот, каждая точка  $P$ , неизменно с нею связанная, поворачивается вокруг  $\Omega$  на угол

$$\Theta = \frac{2\pi}{k-1}.$$

За это время она описывает определенную дугу кривой с угловым отверстием  $\Theta$  (относительно  $\Omega$ ), которая и представляет собой ветвь эпициклоиды. В самом деле, следя за катящейся окружностью  $l$ , мы видим, что точка  $P$ , неизменно связанная

с этой окружностью, приходит в то же положение относительно базы после каждого полного оборота окружности  $l$ ; за эти промежутки она описывает дуги, которые постоянно равны первой из них и переходят одна в другую поворотом вокруг точки  $\Omega$  на угол  $\Theta$ .

32. Если дуга  $\Theta$  соизмерима с  $2\pi$ , то кривая замыкается. В самом деле, коль скоро существует такая рациональная дробь  $\frac{m}{n}$ , что  $\Theta = m \cdot \frac{2\pi}{n}$ , то  $n\Theta$  есть кратное  $2\pi$ . Это значит,



Фиг. 64.

что точка  $P$ , описав  $n$  ветвей, возвращается в точку исхода; продолжая движение, она будет описывать те же ветви. Напротив, совершенно ясно, что в том случае, когда угол  $\Theta$  несоизмерим с  $2\pi$ , ни одна из последующих ветвей не совпадает с предыдущими.

Так как  $\Theta = \frac{2\pi}{k-1}$ , то соизмеримость числа  $\Theta$  с  $2\pi$  эквивалентна рациональности дроби  $k-1 = \frac{b}{a}$  или, что то же, соизмеримости радиусов  $a$  и  $b$  рулетты и базы.

33. Уравнения (7) отнесены к осям специального расположения. Мы легко перейдем к произвольным осям, конечно, при том же начале  $\Omega$ , если сообразим, что здесь все сводится к смещению начала отсчета углов  $\alpha$  и  $\alpha + \beta = k\alpha$ .

Если  $\varphi$  есть угол, первоначально произвольный, на который повернуты оси (в положительную сторону, т. е. в сторону возрастающих аномалий), то мы получим вместо уравнения (7) формулы:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= (a + b) \cos(\alpha - \varphi) + p \cos(k\alpha - \varphi), \\ \eta &= (a + b) \sin(\alpha - \varphi) + p \sin(k\alpha - \varphi). \end{aligned} \right\} \quad (7')$$

Если, в частности, положим здесь

$$\varphi = \Theta = \frac{2\pi}{k-1}$$

и в то же время заменим  $\alpha$  на  $\alpha' + \Theta$ , что даст

$$\alpha - \varphi = \alpha', \quad k\alpha - \varphi = k\alpha' + 2\pi,$$

то уравнения (7') примут вид:

$$\begin{aligned} \xi &= (a + b) \cos \alpha' + p \cos k\alpha', \\ \eta &= (a + b) \sin \alpha' + p \sin k\alpha'. \end{aligned}$$

Эти уравнения совпадают, таким образом, с прежними уравнениями (7), если в последних заменить  $\alpha$  на  $\alpha'$ . Параметрические уравнения эпициклоиды, таким образом, вовсе не изменяются, если повернуть оси на угол  $\Theta$ . Это означает, что кривая занимает то же положение относительно повернутых осей, как и относительно первоначальных, т. е. что она не меняется при повороте на угол  $\Theta$  вокруг точки  $\Omega$ . Мы имеем, таким образом, новое доказательство сопоставления, проведенного в рубр. 31.

34. Рядом с эпициклоидой, которая описана произвольной точкой  $P$ , неизменно связанной с окружностью  $l$ , рассмотрим другую, которую описывает точка  $P'$ , симметричная с  $P$  относительно  $O$ . Если на момент возвратимся к рубр. 29 и 30, то мы сейчас же убедимся, что параметрические выражения координат  $\xi'\eta'$  точки  $P'$ , отнесенные к тем же осям  $\Omega\xi\eta$ , которые были приняты для выражения траектории точки  $P$ , получаются путем увеличения в выражениях координат точки  $P$  угла  $\beta$ , а следовательно, и угла  $\alpha + \beta = k\alpha$  на  $\pi$ . Они имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \xi' &= (a + b) \cos \alpha - p \cos k\alpha, \\ \eta' &= (a + b) \sin \alpha - p \sin k\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (7'')$$

Ввиду симметрии точек  $P$  и  $P'$  по отношению к точке  $O$ , их относительные положения (по отношению к точке соприкосновения с базой), очевидно, замещают друг друга после поворота окружности  $l$ , что составляет поворот вокруг  $\Omega$  на угол  $\frac{\Theta}{2}$ . Траектории, описанные точками  $P$  и  $P'$ , оказываются, таким образом, равными: они приводятся в совмещение поворотом на угол  $\frac{\Theta}{2}$  вокруг точки  $\Omega$ .

Мы можем получить и формальное подтверждение этого, полагая в уравнениях (7')  $\varphi = \frac{\Theta}{2} = \frac{\pi}{k-1}$  и заменяя в то же время  $\alpha - \varphi$  через  $\alpha'$ , а вместе с тем,  $k\alpha - \varphi = k\alpha' + \pi$ ; мы получаем тогда уравнение (7'') при параметре  $\alpha'$  вместо  $\alpha$ .

35. До сих пор мы держались предположения (рубр. 29), что рулетка катится по своей базе, оставаясь вне ее. Если же, наоборот, рулетка движется внутри базы или база остается внутри рулетки, вообще в тех случаях, когда рулетка и база имеют внутреннее касание, все протекает геометрически совершенно аналогично. Что же касается формул, в частности, пара-

метрического выражения траектории, то очень легко убедиться, что они получаются путем замены в полученных выше формулах числа  $a$  на  $-a$ ; таким образом вместо уравнений (7) мы получаем следующие:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= (b - a) \cos \alpha + p \cos k\alpha, \\ \eta &= (b - a) \sin \alpha + p \sin k\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Само собой разумеется, что при замене  $a$  на  $-a$  значение  $k$  станет равным  $1 - \frac{b}{a}$ , остальные же буквы  $a, b, p, \alpha$  сохраняют свои значения. Эти два случая, когда рулетка находится внутри базы или база внутри рулетки, отличаются от рассмотренного выше наименованием *гипоциклического движения*. Траектории, описываемые при этом точками движущейся фигуры, называются *гипоциклоидами*. Не останавливаясь на доказательстве<sup>1)</sup>, заметим, что при  $a > b$  эти траектории также входят в число эписциклоид (образующихся при внешнем качении). Действительное отличие в характере траектории, таким образом, имеет место только в том случае, когда рулетка катится внутри базы ( $a$  не наоборот). Заметим, наконец, что из формул (7) непосредственно вытекает теорема *Кардана* (рубр. 13), именно: при  $b = 2a$  *гипоциклоида — траектория произвольной точки рулетки — сводится к диаметру базы*.

В самом деле, если положим  $b = 2a$ , т. е.  $b - a = a$ , то  $k = 1 - \frac{b}{a} = -1$  и  $p = a$ ; поэтому второе из уравнений (8) дает  $\eta = 0$ .

Уравнения (8) вновь приводят к факту, доказанному уже в рубр. 15, что траектория всякой точки  $P$ , неизменно связанной с рулеткой, но не лежащей на ней, представляет собою эллипс. В самом деле, при  $b - a = a, k = -1$  и при произвольном  $p$  уравнения (8) принимают вид:

$$\xi = (a + p) \cos \alpha, \quad \eta = (a - p) \sin \alpha.$$

Исключая отсюда  $\alpha$ , мы получаем траекторию (при  $p \neq a$ ):

$$\frac{\xi^2}{(a + p)^2} + \frac{\eta^2}{(a - p)^2} = 1.$$

**36. Элемент дуги обыкновенной эписциклоиды и длина конечной дуги.** Продифференцируем уравнения (7), рассматривая как переменную только параметр  $\alpha$ ; это соответствует переходу от произвольной точки  $(\xi, \eta)$  кривой к весьма близкой точке  $\xi + d\xi, \eta + d\eta$ . Мы получим:

$$\begin{aligned} d\xi &= -\{(a + b) \sin \alpha + pk \sin k\alpha\} d\alpha, \\ d\eta &= \{(a + b) \cos \alpha + pk \cos k\alpha\} d\alpha. \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Это доказательство можно найти в сочинении *G. Loria, Specielle algebraische und transcendente ebene Kurven*, Leipzig, Teubner, 1902; S. 482—483.

В случае обыкновенной эпициклоиды при  $p = a$  и  $k = 1 + \frac{b}{a}$ , как обыкновенно, оба коэффициента  $a + b$  и  $pk$  становятся равными. Если вслед затем воспользуемся тригонометрическими тождествами:

$$\left. \begin{aligned} \sin \alpha + \sin k\alpha &= 2 \sin \frac{1}{2}(k+1)\alpha \cos \frac{1}{2}(k-1)\alpha, \\ \cos \alpha + \cos k\alpha &= 2 \cos \frac{1}{2}(k+1)\alpha \cos \frac{1}{2}(k-1)\alpha, \end{aligned} \right\}$$

и соотношением между  $\alpha$  и  $\beta$  (рубр. 29), т. е. напомним вместо  $\beta$   $(k-1)\alpha$ , то дифференциалы координат примут вид:

$$\begin{aligned} dx &= -2(a+b) \sin \frac{1}{2}(k+1)\alpha \cos \frac{1}{2}\beta \cdot d\alpha, \\ d\eta &= 2(a+b) \cos \frac{1}{2}(k+1)\alpha \cos \frac{1}{2}\beta \cdot d\alpha. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает следующее выражение для дифференциала дуги:

$$ds = \sqrt{dx^2 + d\eta^2} = 2(a+b) \left| \cos \frac{1}{2}\beta \cdot d\alpha \right|. \quad (9)$$

Для большей ясности остановимся на полной ветви кривой (рубр. 31), содержащейся между значениями  $-\pi$  и  $\pi$  угла  $\beta$ , т. е. между двумя последовательными (угловыми) точками эпициклоиды, принадлежащими базе. Если при этом считать дугу  $s$  положительной в направлении возрастающих  $\alpha$ , то в формуле (9) можно опустить знак абсолютного значения; воспользовавшись вновь соотношением

$$\beta = (k-1)\alpha = \frac{b}{a}\alpha,$$

можно, очевидно, заменить  $d\alpha$  через  $d\beta$ , что приводит к выражению:

$$ds = 4a \frac{a+b}{b} \cos \frac{1}{2}\beta \cdot \frac{1}{2} d\beta. \quad (9')$$

Интегрируя это выражение от  $-\pi$  до произвольного значения  $\beta$  ( $\leq \pi$ )<sup>1)</sup>, мы получим для длины дуги обыкновенной эпициклоиды (считая от угловой ее точки) выражение:

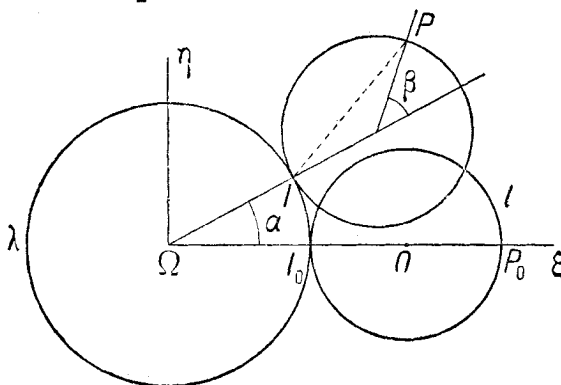
$$s = 4a \frac{a+b}{b} \left( \sin \frac{1}{2}\beta + 1 \right).$$

Полагая здесь  $\beta = \pi$ , мы найдем длину полной ветки кривой, именно:

$$8a \frac{a+b}{b}.$$

<sup>1)</sup> Для других значений  $\beta$  угол, о котором идет речь, имел бы значение  $\alpha + \frac{\beta_0}{2}$ , где  $\beta_0$  означает приведенное значение  $\beta$ , т. е. угол, содержащийся в интервале  $(-\pi, \pi)$  и отличающийся от  $\beta$  на кратное  $2\pi$ .

**37. Радиус кривизны.** В случае обыкновенной эписцилоиды описывающая ее точка  $P$  принадлежит окружности  $l$  (фиг. 65); в этом случае из чертежа совершенно ясно, что для значений  $\beta$ , содержащихся между  $-\pi$  и  $\pi$ , нормаль  $IP$  образует с осью  $\Omega\xi$  угол  $\alpha + \frac{\beta}{2}$ ; отсюда следует, что нормали в двух бесконечно



Фиг. 65.

близких точках образуют угол

$$d\alpha + d\frac{\beta}{2},$$

который, очевидно, равен углу между соответствующими касательными, т. е. представляет собой так называемый угол смежности. Отношение этого угла (взятого по абсолютной величине) к длине дуги, содержащейся между теми

же точками, представляет меру кривизны кривой; обратное отношение выражает радиус кривизны <sup>1)</sup>.

Так как

$$d\alpha + \frac{1}{2} d\beta = \left(1 + \frac{1}{2} \frac{b}{a}\right) d\alpha = \frac{1}{2} \frac{2a+b}{a} d\alpha,$$

то мы получаем из выражения (9):

$$r = \frac{2(a+b)}{2a+b} 2a \left| \cos \frac{1}{2} \beta \right|. \quad (10)$$

Сохраняя ограничение  $-\pi \leq \beta \leq \pi$ , мы видим по чертежу (когда точка лежит на окружности  $l$  и вписанный угол в точке  $P$  составляет  $\frac{\pi}{2}$ ), что длина  $\delta$  отрезка  $IP$  выражается формулой:

$$\delta = 2a \cos \frac{1}{2} \beta. \quad (11)$$

При указанных пределах для угла  $\beta$  (т. е., собственно говоря, для произвольных его значений) можно вместо  $\cos \frac{1}{2} \beta$

<sup>1)</sup> Радиус кривизны мы здесь рассматриваем, как это обыкновенно делается, в его абсолютном численном значении. Иногда, однако, бывает удобно присваивать ему знак; это всякий раз основывается на соглашениях, обусловливаемых характером исследования. Мы имели уже такого рода пример в предыдущем параграфе: при соглашениях относительно знака радиуса кривизны, установленных в рубр. 26, формула Савари получила выражение, при годное во всех случаях; без этого при определении абсолютного значения радиуса кривизны было бы необходимо принимать во внимание различные случаи, которые здесь могут представиться.



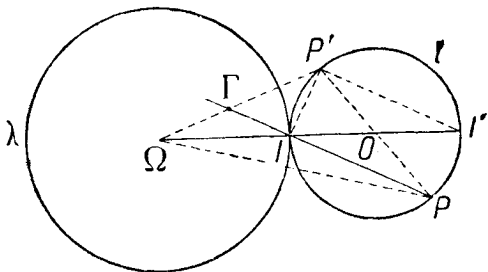
написать  $\left| \cos \frac{1}{2} \beta \right|$ ; сопоставляя это с предыдущим выражением радиуса кривизны  $r$ , получим:

$$r = \frac{2(a+b)}{2a+b} \delta. \quad (10')$$

Мы видим, таким образом, что радиус кривизны в произвольной точке обыкновенной эпициклоиды пропорционален расстоянию этой точки от мгновенного центра  $I$ .

38. Приложения построения Савари. К этому же результату мы приходим и более простым путем, основываясь на геометрической теореме Савари (рубр. 25). С этой целью начнем с определения точек, которые в нашем случае должны заменить  $C$ ,  $\Gamma$ ,  $C$  и  $\Gamma$ , фигурирующие в общем выражении теоремы.

Точками  $C_1$  и  $\Gamma_1$  служат центры  $O$  и  $\Omega$  окружностей  $\lambda$  и  $l$  (фиг. 66). С другой стороны, поскольку мы здесь имеем дело с обыкновенной эпициклоидой, описываемой точкой  $P$  окружности  $l$  (так что профиль  $s$  сводится к одной только точке  $P$ ),  $C$  совпадает с самой точкой  $P$ ; точка же  $\Gamma$ , собственно, и составляет центр кривизны, о котором идет речь в общем предложении.



Фиг. 66.

Отметим еще следующее соображение: если  $P'$  есть точка окружности  $l$ , диаметрально противоположная  $P$ , то прямая  $IP'$  оказывается перпендикулярной к  $IP$  и совпадает с параллелью к касательной  $l''$ , фигурирующей в общей теореме; следовательно, прямые  $IP'$  и  $PO$  пересекаются в точке  $P'$ . Свойство, которое нам нужно использовать, заключается в том, что через ту же точку должна пройти также прямая  $\Omega\Gamma$ . Этим однозначно определяется центр кривизны  $\Gamma$ , как пересечение прямых  $\Omega P'$  и  $IP$ .

Продолжим прямую  $\Omega O$  до вторичного пересечения с окружностью  $l$  в точке  $I'$  и проведем отрезок  $P'I'$ ; он неизбежно будет равен и параллелен отрезку  $IP$ .

Отсюда следует, что два треугольника  $\Omega\Gamma I$  и  $\Omega P'I'$  подобны между собой; поэтому

$$\frac{\Gamma I}{P'I'} = \frac{\Omega I}{\Omega I'} = \frac{b}{2a+b}.$$

Написав  $IP$  вместо  $P'I'$  и прибавив по единице к первому и третьему членам этого равенства, получим:

$$\frac{\Gamma I + IP}{IP} = \frac{2(a+b)}{2a+b},$$

что как раз совпадает с соотношением (10), так как  $IP = \delta$  и  $\Gamma I + IP = \Gamma P = r$ .

39. Эволюта. Подобие треугольников  $\Omega\Gamma I$  и  $\Omega P' I'$  влечет за собой еще пропорции:

$$\frac{\Omega\Gamma}{\Omega P'} = \frac{\Omega I}{\Omega I'} = \frac{b}{2a+b};$$

отсюда ясно, что точки  $\Gamma$  и  $P'$ , расположенные на одной прямой с  $\Omega$ , описывают (с изменением  $P'$ ) гомотетические кривые (т. е. подобные и подобным образом расположенные) относительно  $\Omega$ .

С другой стороны, мы знаем (рубр. 34), что траектория точки  $P'$  представляет собой эпициклоиду, конгруэнтную с траекторией точки  $P$ , ибо она с ней совмещается поворотом на

угол  $\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{k-1}$  вокруг  $\Omega$ . Отсюда вытекает следующая теорема: *эволютой обыкновенной эпициклоиды (т. е. геометрическим местом ее центров кривизны  $\Gamma$ ) служит подобная ей эпициклоида; но она не расположена подобно данной эпициклоиде относительно центра базы  $\Omega$ , а повернута на угол  $\pi(k-1)$ .*

Вряд ли нужно указывать, что к определению эволюты можно прийти также чисто аналитически; для этого достаточно выразить координаты  $\xi^*$  и  $\eta^*$  точки  $\Gamma$ , основываясь на векториальном тождестве

$$\overline{\Omega\Gamma} = \overline{P\Gamma} + \overline{\Omega P}.$$

Формулы, получающиеся для  $\xi^*$  и  $\eta^*$ , непосредственно дают параметрические выражения эволюты; сопоставляя их с уравнением (7'), мы придем к формулированному уже выше выводу.

40. Сопряженные эпициклические и гипоциклические профили. Как для всех видов твердых плоских движений, так и для эпициклических имеют особое значение сопряженные профили. Мы остановимся здесь на одной категории их, к которой приводит общий метод, изложенный в рубр. 19; речь здесь идет о типичном примере этого метода, от которого, собственно, ведет свое начало и его название (эпициклический метод).

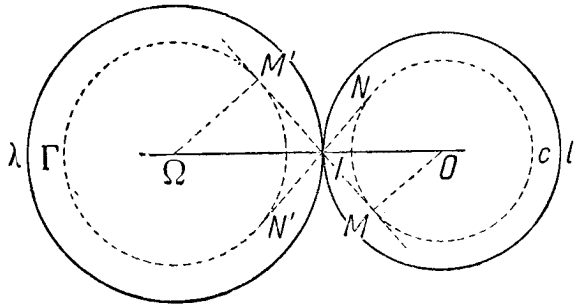
В качестве профиля  $s$ , неразрывно связанного с движущейся фигурой, а следовательно, с окружностью  $l$ , возьмем дугу эпициклоиды, имеющей окружность  $l$  своей базой, а рулеткой произвольную окружность  $k$ . Мы можем непосредственно утверждать (рубр. 35), что сопряженный профиль  $\gamma$  в этом случае представляет собой дугу гипоциклоиды, которая имеет своей базой окружность  $l$  и рулеткой ту же окружность  $k$ , если только остановимся на предположении, что окружности  $l$  и  $k$  имеют внешнее касание. Действительно, достаточно себе представить эти три кривые, соприкасающиеся в точке  $I$ , чтобы стало ясно, что окружность  $k$  касается внешне окружности  $l$ , если она имеет с  $l$  внутреннее касание, и обратно. Отсюда следует, что  $s$  есть дуга гипоциклоиды,  $\gamma$  — дуга эпициклоиды.

Если бы окружности  $l$  и  $k$  имели внутреннее касание, то вспомогательная окружность  $k$ , катясь по  $l$ , дала бы сопряженные профили одного и того же типа, т. е. оба профиля были бы эпициклическими или гипоциклическими.

К интересному частному случаю приводит предположение, что радиус окружности  $k$  представляет половину радиуса окружности  $l$  и что точка, образующая профили  $s$  и  $\gamma$  (которая в общем случае просто неизменно связана с  $k$ ) лежит на самой окружности  $k$ . В этом случае (рубр. 11), эпициклоида  $s$  вырождается в диаметр окружности  $l$ ; это приводит к следующему выводу: *профиль, сопряженный с диаметром рулетты  $l$ , состоит из ветвей обыкновенной эпициклоиды; эта эпициклоида образуется качением по той же базе  $l$  окружности, имеющей вдвое меньший радиус, нежели окружность  $l$ .*

41. Сопряженные профили эвольвент окружностей, concentрических с рулеттой. Мы уже выше (рубр. 39) занимались эволютой эпициклоиды, которая определялась как геометрическое место центров кривизны. Однако, как известно из анализа и как это, в сущности, непосредственно вытекает из опреде-

ления центра кривизны, эволюту любой плоской кривой  $s$  можно еще определить, как огибающую  $s'$  нормалей кривой  $s$ . Иными словами, эволюта кривой  $s$  есть такая кривая  $s'$ , касательными которой служат нормали исходной кривой  $s$ .



Фиг. 67.

Припомним также, что под эвольвентой (или разверзающей) кривой  $s$  разумют любую из бесчисленного множества кривых  $C$ , которые имеют эволютой кривую  $s$ , нормальными которыми поэтому служат касательные кривой  $s$ . Если кривая  $s$  задана, то ее эвольвенту, как известно, можно построить следующим образом: на кривой  $s$  мы выбираем произвольную точку  $P_0$  и сторону обращения самой кривой или соответствующих касательных. Затем к каждой точке кривой  $P$  мы относим ту точку  $Q$  на соответствующей касательной, для которой отрезок  $PQ$  по длине и стороне обращения равен дуге  $\widehat{P_0P}$ . Геометрическое место этих точек  $Q$  и есть эвольвента кривой  $s$ . Как мы видим, их вообще имеется бесчисленное множество в зависимости от выбора точки  $P_0$ . Исходя из этого, мы докажем следующее: эвольвенты окружностей, concentрических с рулеттой и расположенных внутри нее, имеют в качестве сопряженных профилей кривые того же типа, а именно — эвольвенты окружностей, concentричных с базой и расположенных внутри последней.

В частности, предположим, что  $s$  есть окружность, concentрическая с  $l$  и расположенная внутри нее (фиг. 67). Пусть  $IM$  и  $IN$  будут две касательные, проведенные из точки  $I$  к окруж-

ности  $c$ ; они служат нормальными каждой эвольвенты  $C$  этой окружности  $c$ .

Легко убедиться, что огибающая  $\gamma$  какой-либо из этих кривых  $C$ , в свою очередь, представляет эвольвенту некоторой окружности  $\Gamma$ , концентрической с  $\lambda$ . В самом деле, в любом положении рассматриваемой фигуры нормали  $IM$  и  $IN$  к кривой  $C$ , проходя через точку  $I$ , служат также нормальными (рубр. 8) к сопряженному профилю  $\gamma$ . С другой стороны, они касаются в точках  $M'$  и  $N'$  некоторой окружности  $\Gamma$ , концентрической с  $\lambda$ ; и эта окружность  $\Gamma$  всегда остается той же, каково бы ни было положение рулетты, ибо радиус  $\Omega M'$  окружности  $\Gamma$  неизменно связан с радиусом  $OM$  окружности  $c$ ; это вытекает непосредственно из подобия треугольников  $\Omega IM'$  и  $OIM$ , которое даст:

$$\frac{\Omega M'}{OM} = \frac{\Omega I}{OI} = \frac{b}{a}.$$

Это обнаруживает, что кривая  $\gamma$  подобна  $C$  при отношении подобия  $\frac{a}{b}$ .

42. **Предельные случаи.** Здесь целесообразно рассмотреть два интересных предельных случая эпициклического движения. Мы придем к ним, если будем беспредельно ограничивать радиус  $b$  базы или радиус  $a$  рулетты, так что та или иная из двух кривых вырождается в прямую. Если в прямую обращается база, то движение называется *циклоидальным*. Как известно, *циклоидами* называются траектории, описываемые в этих условиях точками рулетты; траектории же, описываемые точками, неизменно связанными с рулеттой, называются *трохоидами*; их называют также *удлиненными* или *укороченными* циклоидами, смотря по тому, лежит ли образующая точка вне рулетты или внутри нее.

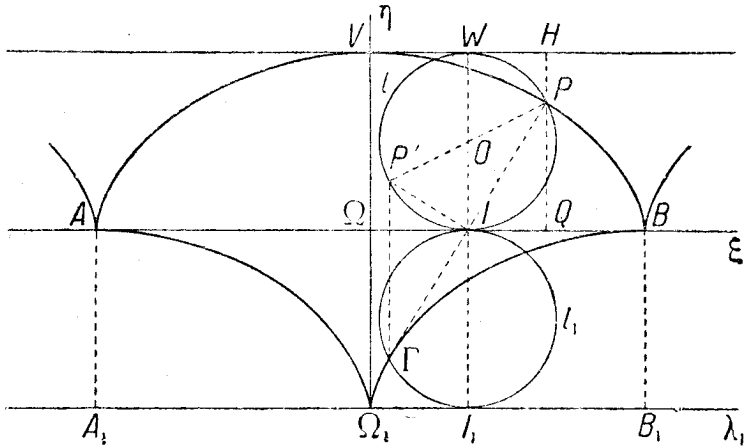
Если же, напротив, в прямую обращается рулетта, то траектории ее точек образуют (предыдущая рубрика) эвольвенты базы; траектории точек, неразрывно связанные с рулеттой, также обыкновенно именуются *удлиненными* или *укороченными* в зависимости от того, находится ли образующая точка с той же стороны прямолинейной рулетты, что и база, или с противоположной.

Параметрические формулы эпициклического движения вообще непригодны для непосредственного перехода к пределу, соответствующему бесконечному значению  $a$  или  $b$ ; но такой переход можно выполнить в формулах Савари (как уже было замечено в рубр. 27). Так, например, при  $l = \infty$  уравнение (10') дает  $r = 2b$ , хорошо известное выражение радиуса кривизны обыкновенной циклоиды.

43. **Некоторые свойства обыкновенной циклоиды.** В предыдущей рубрике мы рассмотрели циклоидальное движение как предельный случай эпициклического. Основываясь на этом, можно исследовать самую циклоиду, пользуясь теми же соображениями

и вводя лишь незначительные изменения, когда простой предельный переход оказывается недостаточным. Для краткости мы здесь ограничимся только тем, что установим некоторые предложения об обыкновенной циклоиде, которые находят себе полезные применения в динамике.

а) *Параметрические уравнения.* За базу примем прямую  $\Omega\xi$ ; пусть  $A$  и  $B$  будут две последовательные вершины циклоиды, т. е. два последовательные положения, в которых образующая точка  $P$  катящейся окружности  $l$  находится на базе (фиг. 68).



Фиг. 68.

За начало осей координат возьмем середину  $\Omega$  отрезка  $AB$ ; ось  $\Omega\xi$ , совпадающую с базой, обратим в сторону точки  $B$ , а ось  $\Omega\eta$  — к верхней точке  $V$  рулетты. Радиус последней обозначим, как выше, через  $a$ .

Зафиксируем какое-либо положение рулетты, а следовательно, и точки  $P$ , и, как обыкновенно, обозначим через  $I$  соответствующую точку соприкосновения (мгновенный центр вращения), через  $O$  — центр окружности.

Пусть  $W$  будет точка, диаметрально противоположная  $I$ , а  $Q$  — проекция точки  $P$  на базу. Дуга окружности  $\widehat{WP}$  равна, вследствие качения, отрезку  $\Omega I$ .

Теперь совершенно ясно, что абсцисса точки  $I$  равняется  $a\theta$ , где  $\theta$  есть угол  $WOP$ , взятый с надлежащим знаком; можно сказать, что  $\theta$  выбирается так, чтобы абсцисса точки  $I$  была равна  $a\theta$ ; переменная  $\theta$  принимается за новый параметр и, таким образом, заменяет собой параметр  $\beta$ , фигурировавший в предыдущих параграфах. Теперь ясно, что координаты  $\xi, \eta$  точки  $P$  во всех случаях выражаются формулами:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \Omega I + IQ = a(\theta + \sin \theta), \\ \eta &= PQ = a(1 + \cos \theta). \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Полная дуга циклоиды получается, когда  $\theta$  проходит через все значения от  $-\pi$  до  $+\pi$ .

б) *Длина дуги.* Так как

$$d\xi = a(1 + \cos \theta) \cdot d\theta, \quad d\eta = -a \sin \theta \cdot d\theta,$$

то длина  $ds$  элемента дуги, отсчитываемой в сторону возрастающих  $\theta$ , выражается формулой:

$$ds = \sqrt{d\xi^2 + d\eta^2} = a\sqrt{2(1 + \cos \theta)} d\theta = 2a \left| \cos \frac{\theta}{2} \right| d\theta.$$

Для значений  $\theta$ , содержащихся между  $-\pi$  и  $\pi$ ,  $\cos \frac{\theta}{2}$  имеет положительное значение; интегрируя поэтому от  $\theta = 0$ , что соответствует верхней точке параболы  $V$ , до произвольного значения  $\theta$ , получим для  $s = \widehat{VP}$  выражение:

$$s = 4a \sin \frac{\theta}{2}. \quad (13)$$

В частности, при  $\theta = \pi$  получим длину половины ветви параболы  $\widehat{VB} = 4a$ ; длина полной ветви равна  $8a$ . Разность

$$y = 2a - \eta,$$

очевидно, выражает расстояние  $PH$  точки  $P$  от касательной к циклоиде в точке  $V$ . Вместе с тем, второе из уравнений (12) дает:

$$y = a(1 - \cos \theta) = 2a \sin^2 \frac{\theta}{2};$$

сопоставляя это с выражением (13), получаем замечательное соотношение:

$$s^2 = 8ay, \quad (14)$$

между длиной дуги и ординатой, к которому нам часто придется возвращаться.

с) *Построение центра кривизны.* Мы воспользуемся для этого теоремой Савари, сохраняя необходимые соглашения относительно обозначений, как мы уже это делали в рубр. 38. Так как мы рассматриваем здесь циклоиду, описываемую точкой  $I$ , то подвижной профиль  $s$  здесь сводится к этой точке, а сопряженный профиль именно и представляет собой циклоиду.

Вследствие этого  $PO$  изображает здесь прямую  $CC_p$ , а прямая  $IT''$  представлена перпендикуляром к  $IP$  из точки  $I$ ; их пересечением ( $J$  в общем выражении теоремы в рубр. 35), таким образом, служит точка  $P'$ , диаметрально противоположная  $P$  на окружности  $l$ .

Центр кривизны  $\Gamma_\lambda$  базы теперь находится в бесконечности, в направлении, перпендикулярном к самой базе; поэтому прямая  $J\Gamma_\lambda$  теперь перпендикулярна к базе в точке  $I''$ . В силу геометрической теоремы Савари она пересекает прямую  $IP$  в искомом центре кривизны  $\Gamma$ .

Из этого построения следует, что треугольник  $PI\Gamma$  подобен треугольнику  $POI$ ; но отрезки  $OP$  и  $OP'$  равны между собою; вследствие этого равны также отрезки  $IP$  и  $I\Gamma$ , определяемые на базе высотой этого треугольника  $PI$ ; поэтому  $\Gamma$  есть точка, противоположная  $P$  относительно  $I$ ; отсюда следует, что

$$P\Gamma = 2PI,$$

как мы это уже нашли выше из формулы Савари при помощи перехода к пределу.

Как непосредственно из чертежа, так и из определения параметра  $\theta$  следует, что  $\widehat{PIO} = \frac{\theta}{2}$  и, следовательно,

$$PI = 2a \cos \frac{\theta}{2};$$

вместе с тем мы получаем для радиуса кривизны циклоиды выражение:

$$r = 4a \cos \frac{\theta}{2},$$

которое, впрочем, можно было бы получить и формально непосредственно из параметрических уравнений (12).

d) *Эволюта циклоиды.* Чтобы определить геометрическое место центров кривизны  $\Gamma$ , удобно рассматривать помимо рулетты  $l$  также окружность  $l_1$ , симметричную с  $l$  относительно точки  $I$ , а потому также касающуюся базы в точке  $I$ . Центр кривизны  $\Gamma$  лежит на этой последней окружности.

Обозначим через  $\lambda_1$  прямую, параллельную базе и отстоящую от нее на расстоянии  $2a$ , а потому касающуюся окружности  $l_1$ ; наконец, через  $A_1, \Omega_1, I_1, B_1$  обозначим проекции точек  $A, \Omega, I, B$  на прямую  $\lambda_1$ .

Дуга  $I_1\Gamma$  окружности  $l_1$ , очевидно, равна дуге  $\widehat{IP}$  окружности  $l$ , которая, в свою очередь, равна отрезку  $I\Omega$ , а потому также отрезку  $I_1\Omega_1$ .

Равенство дуги  $I_1\Gamma$  и отрезка  $I_1\Omega_1$  показывает, что положение точки  $\Gamma$ , соответствующей произвольной точке  $P$ , а следовательно, и произвольному положению окружности  $l$ , есть та именно точка, которую мы получили бы, если бы  $\Gamma$  была неразрывно связана с окружностью  $l_1$ , а эта последняя катилась бы без скольжения по прямой  $\lambda_1$ : при этом точка  $\Gamma$  находилась бы в  $\Omega_1$ , когда соприкосновение имело бы место в этой точке.

Отсюда следует, что эволютой циклоиды служит равная ей циклоида, база которой параллельна базе исходной циклоиды, но снижена на расстояние  $2a$  (т. е. расположена не с той стороны первоначальной базы, с которой лежит исходная кривая, а с противоположной).

Далее, точка, описывающая вторую циклоиду, попадает на базу в точку  $\Omega_1$  (см. выше); она находится в  $A$  и соответственно в  $B$ , когда соприкосновение с прямой  $\lambda_1$  имеет место в  $A_1$  и  $B_1$ .

Отсюда ясно, что циклоида, служащая эволютой, сдвинута по отношению к исходной на половину волны: ее угловые точки, как мы видим на рисунке, например  $\Omega$ , соответствуют верхним точкам на гребне исходной кривой; напротив, верхние ее точки совпадают с угловыми точками ( $A, B$ ) исходной циклоиды.

е) Установив все эти свойства эволюты, мы имеем возможность вновь получить на этот раз уже чисто геометрически соотношение (14). Для этого достаточно припомнить основное свойство эвольвенты (рубр. 41), согласно которому при любом положении точки  $\Gamma$  дуга  $\widehat{B\Gamma}$  всегда равна отрезку  $GP$  касательной в точке  $\Gamma$ , содержащемуся между точкой  $\Gamma$  и самой эвольвентой. Равенство

$$\widehat{B\Gamma} = GP = 2\widehat{\Gamma I},$$

огнесенное к произвольной дуге  $s = \widehat{VP}$  исходной циклоиды, показывает, что длина  $s$  превышает вдвое хорду  $PW$ . Отсюда, вследствие хорошо известной теоремы элементарной геометрии

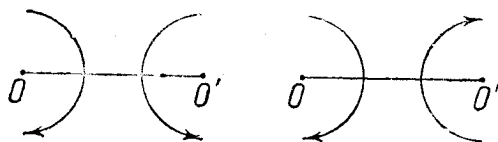
$$\overline{PW}^2 = IW \cdot PH = 2ay$$

непосредственно вытекает соотношение (14).

### 9. Относительное движение двух фигур, вращающихся вокруг различных точек.

44. В теории механизмов играет важную роль относительное движение двух фигур  $F$  и  $F'$ , свободно вращающихся вокруг неподвижных центров  $O$  и  $O'$ .

Обозначим через  $\Delta$  расстояние  $OO'$ , через  $\omega$  и  $\omega'$  — абсолютные значения угловых скоростей; примем во внимание, что эти вращения в произвольно взятый момент могут оказаться:



Фиг. 69.

а) противоположными, т. е. происходящими в противоположные стороны относительно  $O$  и  $O'$ ;

б) сонаправленными, т. е. обращенными в одну и ту же сторону (фиг. 69).

Займемся относительным движением фигуры  $F'$

по отношению к  $F$ , имея в виду главным образом сопоставление скоростей в один и тот же данный момент.

Если будем рассматривать произвольную точку  $P$  плоскости как принадлежащую фигуре  $F$ , то ее скорость  $v$  перпендикулярна к  $OP$  и имеет величину  $\omega\rho$ , где  $\rho$  есть расстояние  $OP$ ; сторона, в которую скорость обращена, зависит от того, в какую сторону происходит самое вращение.

Совершенно так же, если рассматривать точку  $P$  как принадлежащую к фигуре  $F'$ , то она будет иметь скорость  $v'$  перпендикулярную к  $O'P$ ; абсолютная величина (напряжение) этой