Отсюда ясно, что циклоида, служащая эволютой, сдвинута по отношению к исходной на половину волны: ее угловые точки, как мы видим на рисунке, например Ω_1, соответствуют верхним точкам на гребне исходной кривой; напротив, верхние ее точки совпадают с угловыми точками (A, B) исходной циклоиды.

e) Установив все эти свойства эволюты, мы имеем возможность вновь получить на этот раз уже чисто геометрически соотношение (14). Для этого достаточно припомнить основное свойство эвольвенты (рубр. 41), согласно которому при любом положении точки Γ дуга $\overset{\frown}{B\Gamma}$ всегда равна отрезку ΓP касательной в точке Γ, содержащемуся между точкой Γ и самой эвольвентой. Равенство

$$\overset{\frown}{B\Gamma} = \Gamma P = 2\overset{\frown}{\Gamma I},$$

отнесенное к произвольной дуге $s = \overset{\frown}{VP}$ исходной циклоиды, показывает, что длина s превышает вдвое хорду PW. Отсюда, вследствие хорошо известной теоремы элементарной геометрии

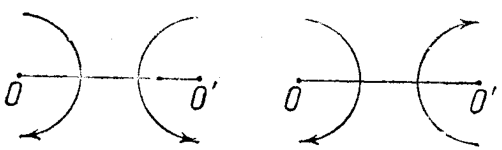
$$\overline{PW}^2 = IW \cdot PH = 2ay$$

непосредственно вытекает соотношение (14).

9. Относительное движение двух фигур, вращающихся вокруг различных точек.

44. В теории механизмов играет важную роль относительное движение двух фигур F и F', свободно вращающихся вокруг неподвижных центров O и O'.

Обозначим через Δ расстояние OO', через ω и ω' — абсолютные значения угловых скоростей; примем во внимание, что эти вращения в произвольно взятый момент могут оказаться:



Фиг. 69.

a) противонаправленными, т. е. происходящими в противоположные стороны относительно O и O';

b) сонаправленными, т. е. обращенными в одну и ту же сторону (фиг. 69).

Займемся относительным движением фигуры F' по отношению к F, имея в виду главным образом сопоставление скоростей в один и тот же данный момент.

Если будем рассматривать произвольную точку P плоскости как принадлежащую фигуре F, то ее скорость v перпендикулярна к OP и имеет величину $\omega\rho$, где ρ есть расстояние OP; сторона, в которую скорость обращена, зависит от того, в какую сторону происходит самое вращение.

Совершенно так же, если рассматривать точку P как принадлежащую к фигуре F', то она будет иметь скорость v' перпендикулярную к $O'P$; абсолютная величина (напряжение) этой скорости равна $\omega'\rho'$, где $\rho' = O'P$. Относительная скорость той же точки, т. е. соответствующая движению фигуры F' относительно F, будет, таким образом, равна

$$\boldsymbol{v}' - \boldsymbol{v}.$$

Поэтому относительная скорость может обращаться в нуль только в том случае, когда направления скоростей $\boldsymbol{v}'$ и $\boldsymbol{v}$ совпадают, т. е. когда точка P *принадлежит прямой* OO'.

Мгновенный центр I движения фигуры F' относительно F нужно, следовательно, искать на линии центров.

Для определенности предположим, что мы здесь имеем дело со случаем a), т. е. с *противонаправленными вращениями*.

В этом случае, для каждой точки P, лежащей внутри отрезка OO', скорости $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{v}'$ не только обе перпендикулярны к прямой OO', но и обращены в одну и ту же сторону. Поэтому разность $\boldsymbol{v}' - \boldsymbol{v}$ может быть равна нулю только в том случае, если равны длины обоих векторов, т. е. если

$$\omega\rho = \omega'\rho',$$

где к тому же

$$\rho + \rho' = \Delta.$$

Таким образом мгновенный центр I определяется, как та точка отрезка OO', которая его делит обратно пропорционально численным значениям угловых скоростей.

Переходя к случаю b), мы видим, что теперь точка I должна лежать вне отрезка OO', и притом так, что отношение $\frac{IO}{IO'}$ должно быть равно $\frac{\omega'}{\omega}$. Точка I стремится поэтому удалиться в бесконечность, когда ω' и ω стремятся к совпадению.

К тому же выводу можно было притти более кратким путем, замечая, что движение фигуры F' относительно F можно рассматривать как составленное из двух вращений вокруг O' и O. Основываясь на сложении вращательных движений вокруг параллельных осей (III, рубр. 27), мы найдем ось результирующего движения, а вместе с тем центр плоского движения.

45. Установив все это, возьмем произвольный промежуток времени, в течение которого точка I остается всегда на конечном расстоянии, и рассмотрим две полярные траектории, т. е. геометрическое место λ точки I относительно фигуры F и аналогичное геометрическое место l той же точки относительно F' [1]).

Случай, когда ω и ω' имеют постоянные значения, и притом, в случае сонаправленных движений неравные между собой, исчерпывается непосредственно. В самом деле, из предыдущего вытекает, что точка I всегда остается на одном и том же расстоянии как от точки O, так и от точки O'; *полярными траекто-*

---

[1]) Т. е. кривую λ, вычерчиваемую точкой I на фигуре F, и кривую l, *вычерчиваемую той же точкой* на фигуре F'. (*Ред.*)

риями λ *и* l *служат две окружности*. Относительное движение является в этом случае *эпициклическим*; все выводы предыдущего параграфа, в частности и те, которые относятся к сопряженным профилям, находят себе здесь применение.

В исключенном выше случае сонаправленных и равных вращений (III, рубр. 27) относительное движение оказалось бы просто поступательным.

46. Перейдем к общему случаю неравномерных вращений и здесь ограничимся следующей проблемой: *задана кривая* λ, *требуется разыскать соответствующую кривую* l.

Предположим, что кривая λ определена своим уравнением в полярных координатах

$$\rho = f(\theta),$$

где ρ и θ отнесены к полюсу O и к полярной оси OA, неизменно связанной с фигурой F; функция $f(\theta)$ остается совершенно произвольной.

Мы имеем в виду разыскать аналогичное уравнение кривой

$$\rho' = f'(\theta'),$$

отнесенной к полюсу O' и полярной оси $O'A'$, неразрывно связанным с фигурой F'.

Рассмотрим произвольную точку P кривой l и остановимся на том моменте t, в который эта точка, вследствие вращения фигуры F' вокруг O', оказывается на прямой OO'; она совпадает в этот момент с мгновенным центром I. Для определенности предположим, что точка I падает между O и O'; тогда

$$\rho' = \Delta - \rho = \Delta - f(\theta). \tag{15}$$

Теперь, чтобы определить кривую l, остается установить зависимость между θ и θ'. Эту зависимость дает найденное нами уже кинематическое соотношение

$$\omega\rho = \omega'\rho'. \tag{16}$$

В бесконечно близкий момент $t + dt$ мгновенный центр I займет на кривой λ положение с аномалией $\theta + d\theta$, а на кривой l положение с аномалией $\theta' + d\theta'$. Элементарные вращения наших двух фигур соответственно вокруг O и O' по абсолютной своей величине, очевидно, составляют $|d\theta|$ и $|d\theta'|$; таким образом

$$\omega\, dt = |d\theta|, \quad \omega' dt = |d\theta'|.$$

Умножая равенство (16) на dt, мы в соответствии с этим получим:

$$\rho\,|d\theta| = \rho'|d\theta'|.$$

При предположении, сделанном относительно положения точки I, элементарные вращения должны быть противонаправлены; поэтому, если положительные аномалии отсчитываются вокруг O и O' в одну и ту же сторону, то $d\theta$ и $d\theta'$ имеют противоположные знаки; вследствие этого предыдущее соотношение получает более точное выражение:

$$\rho\, d\theta + \rho' d\theta' = 0. \tag{16'}$$

Учитывая теперь уравнения кривой λ и соотношение (15), получаем:

$$d\theta' = \frac{f(\theta)\, d\theta}{f(\theta) - \Delta}. \tag{17}$$

Отсюда при помощи квадратуры получаем выражение аномалии θ' через θ. Исключая после этого θ из полученного выражения и уравнения (15), мы получим искомое полярное уравнение кривой l.

47. В силу соотношений (15) и (16′) функции $\rho(\theta)$ и $\rho'(\theta')$ связаны диференциальным соотношением, которое очень полезно вывести; при его помощи можно вовсе избежать действительного интегрирования уравнения (17), так как результат становится и без того ясным.

С этой целью продиференцируем соотношение (15) по θ и затем разделим обе части равенства на ρ; мы получим:

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho'}{d\theta} = -\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{d\theta}.$$

Подставляя в левой части вместо $\rho\, d\theta$ его значение, полученное из соотношения (16′), — мы представим этот результат в более симметричном виде:

$$\frac{d \log \rho'}{d\theta'} = \frac{d \log \rho}{d\theta}. \tag{18}$$

Отсюда непосредственно следует, что в том случае, когда λ есть логарифмическая спираль, то же имеет место относительно l, и обратно; в самом деле, логарифмические спирали характеризуются свойством:

$$\frac{d \log \rho}{d\theta} = \text{const}.$$

В силу уравнения (18) отсюда следует, что постоянное значение сохраняет также производная $\frac{d \log \rho'}{d\theta'}$.

48. Установим теперь следующее общее предложение: *если известна одна пара полярных траекторий $\rho = f(\theta)$, $\rho' = f'(\theta')$, то из нее можно получить бесчисленное множество других пар, которые выражаются уравнениями $\rho = f(n\theta)$, $\rho' = f'(n\theta')$, где n есть произвольный постоянный множитель.*

Чтобы это доказать, заметим следующее: если в уравнения (15) и (17) подставим $f(n\theta)$ вместо $f(\theta)$ и в то же время положим:

$$\theta_1 = n\theta,\ \theta_1' = n\theta',$$

то они примут вид:

$$\rho' = \Delta - f(\theta_1),$$

$$d\theta_1' = \frac{f'(\theta_1)\, d\theta_1}{f(\theta_1) - \Delta}.$$

Но это — те же уравнения (15) и (17), в которых только θ и θ' заменены через θ_1 и θ_1'. Им удовлетворяет, следовательно, пара кривых:

$$\rho = f(\theta_1)$$

и

$$\rho' = f'(\theta_1').$$

Подставляя сюда вместо θ_1 и θ_1' их значения, получим уравнения этих кривых в виде:

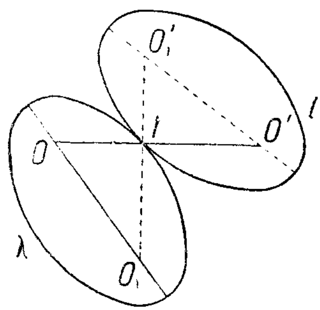
$$\rho = f(n\theta),$$
$$\rho' = f'(n\theta').$$

49. Закончим следующим примером. Примем за λ эллипс, имеющий фокус в точке O и большую ось, равную $\Delta = OO'$ (фиг. 70).

Как на основании общих формул (рубр. 46), так и при помощи прямых геометрических соображений можно найти, что кривая l представляет собою эллипс, равный λ, с фокусом в точке O'.

В самом деле, возьмем произвольное положение фигуры F и обозначим через I пересечение эллипса λ с отрезком OO', пусть O_1 будет второй фокус эллипса λ.

Соединим I с O_1 и продолжим IO_1 за точку I на расстояние IO_1', равное IO. Так как по условию большая ось эллипса λ имеет длину OO_1', то в силу основного фокального свойства эллипса



Фиг. 70.

$$IO + IO_1 = \Delta,$$

а потому IO_1 равно IO'. Из равенства треугольников IOO_1 и $IO_1'O'$ теперь следует, что $O'O_1' = OO_1$.

Установив это, представим себе, что фигура F' вращается вокруг O'; определенный ее луч $O'O_1'$ в каждый момент занимает положение, которое в силу предыдущего построения однозначно определяется положением фигуры F при ее вращении вокруг O.

На этом луче точка O_1' всегда будет сохранять свое положение, так как расстояние $O'O_1'$ будет все время оставаться равным междуфокусному расстоянию Δ эллипса λ. Отсюда непосредственно вытекает, что геометрическое место точек I на фигуре F' есть эллипс l, равный λ. В самом деле, сумма расстояний точки I от двух точек O' и O_1', неизменно связанных с F', как раз равна Δ.