10. Применения к зубчатым колесам.

50. В технике часто бывает необходимым преобразовать вращательное движение, происходящее вокруг одного вала, в аналогичное вращение вокруг параллельного вала. Это достигается посредством зацепления двух колес, насаженных на эти валы. Отвлекаясь от толщины колес, их можно представлять себе расположенными в одной и той же плоскости, перпендикулярной к валам.

Наиболее обычный случай, на котором мы здесь остановимся лишь вкратце, это тот, когда оба вращения происходят равномерно, так что *относительное движение обоих колес есть эпициклическое* (рубр. 45).

Обе полярные траектории называются *основными окружностями*. Они представляли бы собой идеал сопряженных профилей (рубр. 23), если бы при их посредстве можно было на практике осуществить правильную передачу движения с одного колеса на другое.

В некоторых случаях такая возможность действительно существует. Когда механизм подвержен действию незначительных сил, то простой натуральной шероховатости соприкасающихся круговых профилей достаточно для передачи движения; когда одно колесо вращается, другие за ним следуют без скольжения; мы имеем тогда *колеса с трением*. Но когда сопротивление, как это имеет место в большинстве случаев, превышает определенный предел, уже нельзя рассчитывать на правильную передачу при простом соприкосновении. В этих случаях нужно заменить основные окружности волнистыми сопряженными профилями, которые способны своей материальной непроницаемостью гарантировать необходимую передачу движения. Это приводит, таким образом, к двум зубчатым колесам, которые совместно образуют *механизм зацепления*.

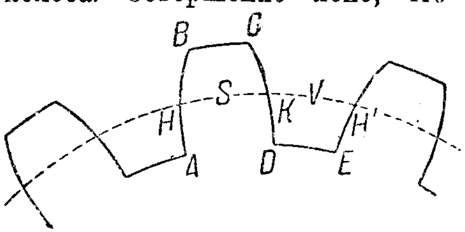
Такой механизм может быть *односторонним*, если одно из двух колес, например K, способно сообщить другому вращение только в одну определенную сторону. Зацепление называется *обратимым*, когда оно может функционировать в обе стороны, *взаимным*, когда колеса по своему назначению могут друг друга заменять (без обращения сторон соответствующих вращений).

Вообще, при установившемся режиме механизма одно из двух колес всегда является *движущим* или *ведущим*, а другое *ведомым*.

51. Что касается формы, которую следует дать профилям, то в этом отношении, прежде всего, нужно иметь в виду общее правило, что они должны возможно менее удаляться от полярных траекторий. По этой причине стараются дать колесам такую форму, чтобы наружная граница каждого колеса (как уже было указано выше, волнистая) частью была расположена вне основной окружности, частью же внутри ее. При этих условиях она удаляется от основной окружности меньше, чем это имело бы место, если бы она была целиком расположена вне этой окружности.

Волнообразные возвышения профиля, как правило делаются равными между собой. Каждое из них, например, $ABCDE$ (фиг. 71) называется *зубом* или, правильнее, *профилем зуба*; самое же название *зуба* сохраняется за площадью, т. е. за выступающей частью колеса (на фиг. 71), которая содержится между профилем и окружностью, концентрической с основной окружностью и проходящей через точки A, D, E... Пустоты между последовательными зубьями называются *просветами* (V на фиг. 71).

Наконец, часть основной окружности HH', отделяемая зубом и следующим за ним просветом, называется *ходом* зубчатого колеса. Совершенно ясно, что два колеса, приспособленные к взаимному зацеплению, непременно должны иметь один и тот же ход. В самом деле, когда одно из двух колес повернется на угол, соответствующий ходу, то общее его геометрическое положение относительно линии центров OO' остается совершенно неизмененным: каждый зуб замещается только последующим зубом. Когда механизм в ходу, то же должно иметь место и для второго колеса; таким образом по основным окружностям, служащим полярными траекториями, точка соприкосновения продвигается на равные дуги; отсюда мы и заключаем о равенстве хода одной и другой зубчатки.



Фиг. 71.

52. Установив все это, обозначим через ρ и ρ радиусы основных окружностей, через n — число зубьев, которыми снабжено колесо R, и через n' — число зубьев колеса R'.

По определению, ход колеса R равен $\frac{2\pi\rho}{n}$, а ход колеса R' равен $\frac{2\pi\rho'}{n'}$. Равенство хода выражается теперь *законом пропорциональности*:

$$\frac{n}{\rho}=\frac{n'}{\rho'}$$

между числами зубьев на каждом колесе и радиусами основных окружностей.

Другим основным законом является установленная уже в предыдущем параграфе обратная пропорциональность между радиусами ρ и ρ' и угловыми скоростями, с которыми вращаются колеса, т. е. соотношение:

$$\omega\rho=\omega'\rho';$$

перемножая последние два равенства почленно, получаем: $\omega n=\omega' n'$. Таким образом числа зубьев двух колес в зацеплении обратно пропорциональны угловым скоростям их вращения.

53. Во взаимных зацеплениях (рубр. **50**) профиль $ABCDE$ зуба разделяется на четыре части, две из которых — боковые — расположены симметрично относительно среднего радиуса, а две другие — AD и CD — расположены продольно по отношению к основной окружности.

Когда передача движения происходит в определенную сторону, то одна из боковых дуг, например AB, играет ведущую роль; при обратном движении эта роль переходит к симметричной дуге CD. Две продольные дуги BC и DE не предназначены для соприкосновения с другим колесом; для них поэтому нет надобности рассматривать сопряженные профили. Выбор последних зависит от конструктивных особенностей аппарата в каждом частном случае. Отметим только, что для сохранения непрерывности в передаче движения профилю зубьев и интервалам DE следует дать такие размеры, чтобы по крайней мере один из зубьев в каждый момент находился в соприкосновении с сопряженным профилем. Следует даже принять за правило такое устройство механизма, чтобы в соприкосновении всегда находились два зуба с одной и с другой стороны, — не больше, иначе значительно возрастет трение (за счет энергии преобразуемого движения), — но и не меньше из предосторожности, чтобы движение не прерывалось в случае порчи какого-либо зуба.

54. Если радиус одного из двух колес рассматривается как известный, если известны также как угловая скорость ω этого колеса, так и угловая скорость ω', с которой должно вращаться другое колесо, то радиус последнего ρ' определяется из соотношения $\omega\rho = \omega'\rho'$; определение сопряженного профиля для произвольной дуги AB выполняется автоматически по общей теории эпициклического движения.

Отметим еще соглашение, по которому на дуге AB отличают две части: *ребро зуба* AH, т. е. часть, находящуюся внутри основной окружности, и *головку зуба* HB, лежащую вне этой окружности.

Рассмотрим несколько примеров, относящихся к внешним зацеплениям (основные окружности расположены одна вне другой).

a) Предположим, во-первых, что AH есть дуга гипоциклоиды, а AB — прилегающая часть эпициклоиды; обе дуги имеют базой основную окружность. Из рубр. **40** непосредственно следует, что второе колесо также должно быть снабжено гипоциклическими ребрами и эпициклическими головками. Этот тип зацепления называется *эпициклическим*.

b) Если ребро AH образует прямолинейный отрезок, то в сопряженный профиль все еще должна входить дуга эпициклоиды. Вместе с тем, эпициклическую головку HB можно выбрать так, чтобы сопряженная гипоциклоида обратилась в прямолинейный отрезок: для этого достаточно, чтобы примыкающая к HB рулетта имела радиус $\frac{\rho}{2}$, где ρ — радиус первой основной окружности колеса, о котором идет речь. Таким образом оба колеса имеют прямолинейные ребра и эпициклические головки. Это так называемое зацепление с *прямолинейными ребрами*.

c) Более предпочтительным, по причинам, которые мы сейчас укажем, является так называемые зацепление *с эвольвентой*, в котором AB есть дуга эвольвенты окружности, концентрической с основной окружностью и расположенной внутри ее. Сопряженный профиль в этом случае (рубр. 41) не только относится к тому же типу, но даже подобен первому профилю; отношение подобия совпадает с отношением $\frac{\rho}{\rho'}$ радиусов колес.

55. На практике, очевидно, важно располагать *ассортиментом зубчатых колес*. Под этим разумеют совокупность таких колес, что любые два могут быть приведены в зацепление; в каждом ассортименте стараются располагать колесами с любым числом зубьев (конечно, в известных пределах); таким образом (рубр. 52) можно устанавливать, по крайней мере приблизительно (и, конечно, в известных пределах), любые отношения скоростей, которые могут оказаться нужными при действии механизма.

Легко отдать себе отчет, что как эпициклический тип, так и тип с эвольвентой пригодны для построения ассортиментов. Между тем типы с прямолинейным ребром для этой цели непригодны. Ассортименты с эвольвентой представляют с точки зрения технического изготовления большие преимущества потому, что в отличие от других они состоят из совершенно подобных зубчатых колес. Этим объясняется преимущественное применение в технике зацеплений с эвольвентами; они, впрочем, представляют еще и другое преимущество, на котором мы не будем останавливаться, чтобы не входить в технические детали. Систематическое изложение этого предмета можно найти в специальных трактатах [1]).

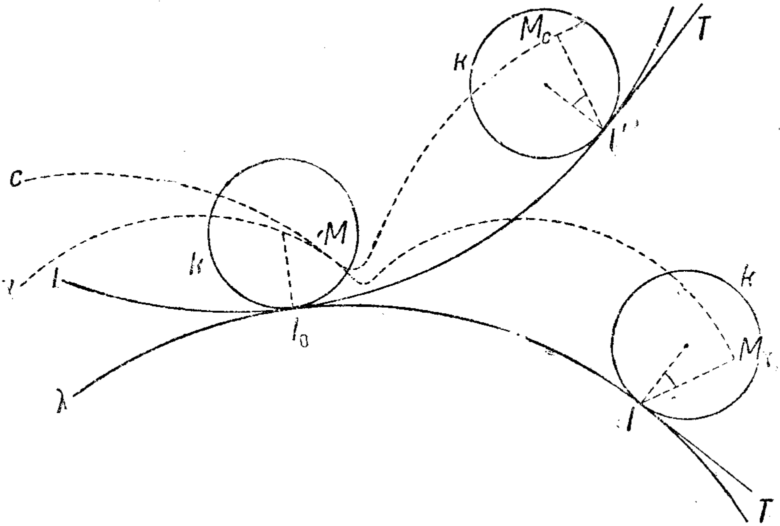
56. Мы хотим присоединить еще только несколько соображений относительно так называемых линий действия. Под *линиями действия*, или *линиями соприкосновений* двух зубчатых колес, разумеют геометрическое место точек, в которых два зуба приходят друг с другом в соприкосновение; речь идет о геометрическом месте по отношению к неподвижному наблюдателю; по отношению же к каждому из колес это геометрическое место, очевидно, представляет просто профиль зубьев. Название линии действия обусловливается тем, что именно в точках этой кривой совершается передача действия с одного колеса на другое.

Неподвижного наблюдателя (в плоскости движения) мы можем схематизировать в мгновенном центре I перпендикуляром II' к линии центров OO'; этот перпендикуляр совпадает с общей касательной в точке соприкосновения I основных окружностей

---

[1]) См., например, *D. Tessari*, La costruzione degli ingranaggi, Torino 1902, а также главу „Кинематика в приложении к машинам" в т. I сочинения *Lecornu*, Cours de mécanique, Paris 1914.

обоих колес. Теперь припомним, что произвольные два сопряженные профиля c и γ имеют точкой соприкосновения основание общей нормали, проведенной к ним из точки I; тогда становится ясным, что определение линии действия может быть приведено к следующей геометрической проблеме: дан подвижной профиль с определенным законом движения относительно IT; разыскать геометрическое место оснований M нормалей, проведенных из точки I к последовательным положениям профиля. В интересующем нас случае речь идет о профиле произвольного зуба одного из двух колес, например R; движение его



Фиг. 72.

связано с вращением колеса вокруг точки O. Принципиально это приводит, как видим, к задаче об огибающих, аналогичной той, которая встречается в определении сопряженных профилей (рубр. 7).

Однако в некоторых конкретных случаях можно, как и в случае сопряженных профилей, легче достигнуть цели при помощи эпициклического метода. Некоторое очевидное расширение этого метода позволяет осуществить, как мы это сейчас покажем, непрерывное вычерчивание линии действия.

С этой целью возвратимся к рубр. 19 и предположим, что кривая k движется, постоянно проходя через точку I, и в этой точке постоянно касается неподвижной прямой IT (фиг. 72); вместе с этой кривой k движется неизменно связанная с нею точка M, которая образует сопряженные профили c и γ, когда кривая k катится по l и по λ. Траектория, которую в этих условиях описывает точка M, в среде, неизменно связанной с касательной IT, и есть линия действия в общем значении этого слова (применимом к любому плоскому движению, т. е. геометрическое место точек касания двух сопряженных профилей относительно мгновенного центра I и общей касательной IT кривых l и λ [1]).

Доказательство этого утверждения не сложно. При образовании кривых c и γ качением кривой k положения M_c и M_γ точки M, соответствующие произвольному соприкосновению кривых c и γ, сохраняют то же расположение относительно прямых IT и $I'T'$ (IT — касательная к кривой λ, $I'T'$ — к кривой l). С другой стороны, линия действия, по своему определению, есть отнесенное к IT геометрическое место точек M_γ, в которых подвижный профиль c касается сопряженного профиля; оно совпадает с геометрическим местом точек M, соответствующих различным положениям кривой k относительно одной из ее касательных. Указанное движение кривой k, очевидно, и должно служить для реализации линии действия.

57. Примеры линий действия. В эпициклических зацеплениях зубья составлены из двух дуг: из гипоциклического ребра и эпициклической головки, та и другая имеют базой основную окружность. Кривой k, о которой шла речь в предыдущем параграфе, служит окружность, вообще различная для ребра и для головки; образующая же точка M в том и другом случаях занимает надлежащее место на кривой k. Поэтому линия действия (геометрическое место точки M, когда k скользит, касаясь неподвижной прямой в неподвижной точке) совпадает с самой кривой k, т. е. на практике с некоторой ее дугой, надлежащим образом ограниченной. При детальном анализе оказывается, что вся линия действия состоит из двух дуг тех самых окружностей, которые служат рулеттами для образования ребер и головок зуба. То же заключение остается в силе также для зацеплений с прямолинейными ребрами, потому что они входят в число рассмотренных зацеплений, как частные случаи (рубр. 54, b).

Менее просто складывается эпициклическое образование линии действия в случае зацеплений с эвольвентами (рубр. 54, c). Обратно, из определения соответственных профилей (рубр. 41) вытекает, что общей нормалью из мгновенного центра I служит неподвижная прямая (IMM' или INN' на фигуре, стр. 251). Линией действия, таким образом, служит прямолинейный отрезок.

11. Аналитическое исследование плоского твердого движения.

58. Общие результаты, которые мы установили в § 1 и 2 относительно плоского твердого движения синтетическим путем, могут быть выведены аналитически. Мы здесь займемся в дополнение к изложенному возможно кратким аналитическим выводом основных формул, чтобы воспользоваться ими для установления некоторых дальнейших свойств плоского движения.

---

1) Это значит, линией действия служит траектория, которую описывает точка M в плоскости, неразрывно связанной с касательной IT; в этом смысле авторы употребляют термины „траектория относительно IT“ или „кривая, отнесенная к IT“. (*Ред.*)