точек касания двух сопряженных профилей относительно мгновенного центра I и общей касательной IT кривых l и λ [1]).

Доказательство этого утверждения не сложно. При образовании кривых c и γ качением кривой k положения M_c и M_γ точки M, соответствующие произвольному соприкосновению кривых c и γ, сохраняют то же расположение относительно прямых IT и $I'T'$ (IT — касательная к кривой λ, $I'T'$ — к кривой l). С другой стороны, линия действия, по своему определению, есть отнесенное к IT геометрическое место точек M_γ, в которых подвижный профиль c касается сопряженного профиля; оно совпадает с геометрическим местом точек M, соответствующих различным положениям кривой k относительно одной из ее касательных. Указанное движение кривой k, очевидно, и должно служить для реализации линии действия.

57. Примеры линий действия. В эпициклических зацеплениях зубья составлены из двух дуг: из гипоциклического ребра и эпициклической головки, та и другая имеют базой основную окружность. Кривой k, о которой шла речь в предыдущем параграфе, служит окружность, вообще различная для ребра и для головки; образующая же точка M в том и другом случаях занимает надлежащее место на кривой k. Поэтому линия действия (геометрическое место точки M, когда k скользит, касаясь неподвижной прямой в неподвижной точке) совпадает с самой кривой k, т. е. на практике с некоторой ее дугой, надлежащим образом ограниченной. При детальном анализе оказывается, что вся линия действия состоит из двух дуг тех самых окружностей, которые служат рулеттами для образования ребер и головок зуба. То же заключение остается в силе также для зацеплений с прямолинейными ребрами, потому что они входят в число рассмотренных зацеплений, как частные случаи (рубр. 54, b).

Менее просто складывается эпициклическое образование линии действия в случае зацеплений с эвольвентами (рубр. 54, c). Обратно, из определения соответственных профилей (рубр. 41) вытекает, что общей нормалью из мгновенного центра I служит неподвижная прямая (IMM' или INN' на фигуре, стр. 251). Линией действия, таким образом, служит прямолинейный отрезок.

11. Аналитическое исследование плоского твердого движения.

58. Общие результаты, которые мы установили в § 1 и 2 относительно плоского твердого движения синтетическим путем, могут быть выведены аналитически. Мы здесь займемся в дополнение к изложенному возможно кратким аналитическим выводом основных формул, чтобы воспользоваться ими для установления некоторых дальнейших свойств плоского движения.

---

[1]) Это значит, линией действия служит траектория, которую описывает точка M в плоскости, неразрывно связанной с касательной IT; в этом смысле авторы употребляют термины „траектория относительно IT“ или „кривая, отнесенная к IT“. (*Ред.*)

Если неподвижная плоскость π и подвижная p отнесены к двум парам ортогональных сонаправленных (образующих по отношению к наблюдателю правосторонние пары) осей $\Omega\xi\eta$ и Oxy, а через θ обозначим аномалию ориентированной оси Ox относительно ориентированной же оси $\Omega\xi$, то уравнения движения точки P плоскости p имеют вид:

$$\left.\begin{aligned}\xi &= \alpha + x\cos\theta - y\sin\theta,\\ \eta &= \beta + x\sin\theta + y\cos\theta;\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

здесь x, y обозначают постоянные координаты точки P в плоскости P, а α, β (координаты подвижного начала в плоскости π) и аномалия θ суть определенные функции времени. Эти уравнения можно вывести, либо применяя к этому случаю формулы (2) гл. III, либо интерпретируя формулы преобразования ортогональных декартовых координат в плоскости.

Диференцируя соотношение (19) по времени t, мы получим компоненты скорости v точки P по неподвижным осям, именно:

$$\left.\begin{aligned}v_\xi &= \dot\alpha - \dot\theta\,(x\sin\theta + y\cos\theta),\\ v &= \dot\beta + \dot\theta\,(x\cos\theta - y\sin\theta).\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

На основании тех же уравнений (19) они могут быть представлены в виде:

$$\left.\begin{aligned}v_\xi &= \dot\alpha - \dot\theta\,(\eta - \beta),\\ v_\eta &= \dot\beta + \dot\theta\,(\xi - \alpha),\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

где $\dot\alpha, \dot\beta$ суть компоненты скорости v_0 подвижного начала O по неподвижным осям.

Если же теперь обратимся к подвижным осям, то компоненты v_x, v_y скорости v выразятся формулами:

$$\left.\begin{aligned}v_x &= v_\xi\cos\theta + v_\eta\sin\theta,\\ v_y &= -v_\xi\sin\theta + v_\eta\cos\theta,\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

или же, в силу соотношений (20),

$$v_x = \dot\alpha\cos\theta + \dot\beta\,\sin\theta - y\dot\theta,\quad v_y = -\dot\alpha\sin\theta + \dot\beta\cos\theta + x\dot\theta.$$

С другой стороны, в силу тех же соотношений (22) выражения

$$\dot\alpha\cos\theta + \dot\beta\sin\theta \quad \text{и} \quad -\dot\alpha\sin\theta + \dot\beta\cos\theta$$

представляют компоненты $v_{0/x}, v_{0/y}$ скорости v_0 по подвижным осям; отсюда мы заключаем, что

$$\left.\begin{aligned}v_x &= v_{0/x} - y\dot\theta,\\ v_y &= v_{0/y} + x\dot\theta.\end{aligned}\right\} \tag{21'}$$

Из соотношений (21) и (21′) непосредственно вытекают результаты рубр. 3. В самом деле, из формул (21) или (21′) следует, что во всякий момент, в который угловая скорость $\dot\theta$ обращается в нуль, для любой точки P подвижной плоскости

$$v = v_0,$$

т. е. все точки плоскости p имеют равные скорости; состояние движения имеет поступательный характер. Напротив того, во всякий момент, в который $\dot{\theta}$ не равно нулю, существует одна и только одна точка, скорость которой равна нулю; это та точка I, координаты которой обращают в нуль обе компоненты вектора $\boldsymbol{v}$. Чтобы определить положение этой точки I на плоскости π, т. е. чтобы разыскать ее координаты ξ_0, η_0 мы имеем в соответствии с соотношением (21) уравнения:

$$\dot{\alpha} - \dot{\theta}(\eta_0 - \beta) = 0; \quad \dot{\beta} + \dot{\theta}(\xi_0 - \alpha) = 0,$$

и, таким образом,

$$\xi_0 = \alpha - \frac{\dot{\beta}}{\dot{\theta}}, \quad \eta_0 = \beta + \frac{\dot{\alpha}}{\dot{\theta}}. \tag{23}$$

Принимая во внимание твердость системы, мы отсюда непосредственно заключаем, что состояние движения в этот момент есть вращение вокруг точки I, т. е. I есть мгновенный центр движения. Координаты x_0, y_0 точки I на подвижной плоскости определяются аналогичным образом уравнениями (21′), если в них положим $v_x = v_y = 0$; это дает:

$$x_0 = -\frac{v_{0/y}}{\dot{\theta}}, \quad y_0 = \frac{v_{0/x}}{\dot{\theta}}. \tag{23′}$$

Между значениями ξ_0, η_0, определяемыми формулами (23), и x_0, y_0, выражаемыми формулами (23′), имеют место соотношения (19); в этом можно убедиться, если принять во внимание выражение компонент $v_{0/x}, v_{0/y}$.

В те промежутки времени, в которые $\dot{\theta}$ остается отличным от нуля, уравнения (23) и (23′) представляют собой параметрические выражения базы λ и рулетты l. Более того, поскольку параметром служит время, на них можно смотреть, как на уравнение движения полюса по этим кривым. Из этих уравнений можно было бы легко вывести результаты рубр. **23**; но мы не будем здесь в это входить, а обратимся к полученным формулам, чтобы вывести из них некоторые дальнейшие свойства второго порядка.

59. Ускорение. Центр ускорений. Диференцируя уравнение (21), мы получим следующие выражения для компонент a_ξ, a_η по неподвижным осям ускорения $\boldsymbol{a}$ произвольной точки P подвижной плоскости:

$$\left.\begin{aligned} a_\xi &= \ddot{\alpha} - \ddot{\theta}(\eta - \beta) - \dot{\theta}(v_\eta - \dot{\beta}), \\ a_\eta &= \ddot{\beta} + \ddot{\theta}(\xi - \alpha) + \dot{\theta}(v_\xi - \dot{\alpha}); \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

подставляя же сюда вместо $v_\xi - \dot{\alpha}$, $v_\eta - \dot{\beta}$ их выражения из уравнений (21), найдем:

$$\left.\begin{aligned} a_\xi &= \ddot{\alpha} - \ddot{\theta}(\eta - \beta) - \dot{\theta}^2(\xi - \alpha), \\ a_\eta &= \ddot{\beta} + \ddot{\theta}(\xi - \alpha) - \dot{\theta}^2(\eta - \beta). \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Приравнивая правые части нулю, мы получим систему линейных уравнений относительно ξ, η, определитель которой равен $\ddot{\theta}^2+\dot{\theta}^4$; если $\dot{\theta}$ отлично от нуля, этот определитель также не равен нулю. Мы отсюда заключаем, что *во всякий момент, в который состояние движения носит вращательный характер, существует одна и только одна точка, в которой ускорение обращается в нуль*: она называется *центром ускорений* движущейся плоскости в рассматриваемый момент.

60. Чтобы вывести некоторые дальнейшие свойства распределения ускорений в произвольный момент t, в который $\dot{\theta} \neq 0$, нужно целесообразно выбрать оси координат.

Положим, что в рассматриваемый момент t обе начальные точки Ω и O совпадают с мгновенным центром I, — более того, ось $\Omega\xi$ совпадает с общей касательной к двум полярным траекториям λ и l в точке I. При этих условиях в этот момент t, вследствие совпадения точек O и Ω, $\alpha=\beta=0$; вследствие же совпадения точки Ω с I $\xi_0=\eta_0=0$; поэтому уравнения (23) дают: $\dot{\alpha}=\dot{\beta}=0$.

Воспользуемся теперь тем, что ось $\Omega\xi$ совпадает с общей касательной к кривым λ и l в точке I; в этих условиях при элементарном движении от этого момента t до бесконечно близкого момента $t+dt$ полюс I смещается вдоль этой именно оси; поэтому в этот момент должно обращаться также в нуль элементарное наращение $d\eta_0$ координаты η_0, а вместе с тем в момент t должна обращаться в нуль и производная $\dot{\eta}_0$. Если теперь продиференцируем второе из уравнений (23) по времени и отнесем его к тому же моменту t, то убедимся, что в этот момент также $\ddot{\alpha}=0$. Из всего этого следует, что *во всякий момент, в который скорость вращения отлична от нуля, ускорение полюса направлено по общей нормали к полярным траекториям.*

Резюмируя, приходим к выводу, что при соглашениях, сделанных относительно выбора координат, в рассматриваемый момент t $\alpha=\beta=\ddot{\alpha}=0$. Вследствие этого в этот момент выражения (25) координат ускорения точки P, занимающей на неподвижной плоскости произвольное положение ξ, η, принимают вид:

$$a_\xi = -\ddot{\theta}\eta - \dot{\theta}^2\xi, \quad a_\eta = \ddot{\beta} + \ddot{\theta}\xi - \dot{\theta}^2\eta. \tag{25'}$$

Но если точка P не совпадает с мгновенным полюсом, т. е. с точкой $\Omega\equiv 0$, то прямая ΩP в момент t оказывается нормальной к своей траектории (рубр. 4); поэтому, чтобы получить нормальное и касательное ускорения в этот момент, достаточно будет определить компоненты ускорения a по направлению ΩP и направлению, перпендикулярному к ΩP; таким образом, если через ρ обозначим радиус-вектор ΩP и попрежнему ограничимся тем же моментом t, то получим:

$$a_n = a_\xi\frac{\xi}{\rho} + a_\eta\frac{\eta}{\rho}, \qquad a_t = -a_\xi\frac{\eta}{\rho} + a_\eta\frac{\xi}{\rho},$$

или же, на основании уравнений (25) и соотношения $\xi^2 + \eta^2 = \rho^2$:

$$a_n = \frac{\ddot{\beta}\eta}{\rho} - \dot{\theta}^2\rho, \quad a_t = \frac{\ddot{\beta}\xi}{\rho} + \ddot{\theta}\rho$$

Поэтому геометрическое место точек, в которых в момент t обращается в нуль нормальное или касательное ускорение на неподвижной плоскости, выражается соответственно первым или вторым из уравнений:

$$\dot{\theta}^2\rho^2 - \ddot{\beta}\eta = 0; \quad \ddot{\theta}\rho^2 + \ddot{\beta}\xi = 0, \tag{26}$$

которые выражают две окружности.

Первая из этих кривых (геометрическое место точек нулевого нормального ускорения) называется *окружностью перегибов*, так как она представляет собой также геометрическое место точек, в которых в этот момент соответствующая кривая имеет перегиб. В самом деле, мы знаем, что (II, рубр. 26) $a_n = v^2/r$, где r есть радиус кривизны траектории точки P; так как при этом $v \neq 0$, ибо точка P, по предположению, не совпадает с полюсом I, то условие перегиба $\frac{1}{r} = 0$ может быть заменено положением $a_n = 0$.

Что касается второй окружности (26), т. е. геометрического места нулевого касательного ускорения, то ее можно назвать *окружностью стационарности*; она характеризуется тем обстоятельством, что производная напряжения скорости в каждой из ее точек обращается в нуль, а потому имеет стационарное значение в частности наибольшее или наименьшее).

Как окружность перегибов, так и окружность стационарности проходят через мгновенный центр Ω [это вытекает непосредственно из уравнения (26)], а также через центр ускорений (поскольку в нем обращается в нуль ускорение, а следовательно, и обе его компоненты). Из уравнения (26) следует еще, что окружность перегибов в точке Ω касается оси ξ, т. е. касается в мгновенном полюсе двух полярных траекторий; окружность же стационарности в точке Ω касается оси η, т. е. в полюсе пересекает ортогонально обе полярные траектории.

61. При предыдущих рассуждениях мы предположили, что точка P отлична от полюса.

Скажем теперь несколько слов о поведении по отношению к своей траектории той точки подвижной плоскости, которая в данный момент является полюсом вращения.

Для простоты предположим, что в этот момент окружность перегибов не сводится к одной точке; при таком ограничении легко убедиться, что полюс представляет собой угловую точку соответствующей траектории и что касательная в этой угловой точке совпадает с нормалью к базе λ.

Сохраним для этого сделанное уже предположение относительно осей $\Omega\xi\eta$ и разверием в ряд Тэйлора координаты ξ и η положения в момент $t + dt$ той точки, которая в момент t служила полюсом.

Очевидно, мы получим:

$$\xi = \mu, \quad \eta = \frac{dt^2}{2}\ddot{\beta} + \nu,$$

где μ и ν суть выражения третьего порядка относительно dt.

Но здесь не может быть $\ddot{\beta} = 0$, ибо при $\ddot{\beta} = 0$ окружность перегибов свелась бы к точке, что противно нашему предположению.

Так как, следовательно, $\ddot{\beta} \neq 0$, то из предыдущих соотношений вытекает, что траектория точки I имеет в этой точке касательной прямую $\Omega\eta$; если мы поэтому дадим dt значения различных знаков, достаточно близкие к нулю, то ордината η не меняет знака; это и означает, что прямая $\Omega\eta$ есть касательная в угловой точке.

УПРАЖНЕНИЯ.

1. Платформа движется на катках. Если груз, а следовательно, и трение достаточно велики, то образуется чистое качение платформы по каткам и катков по земле. Показать, что продвижение платформы превышает вдвое продвижение катков (точнее, оси каждого катка).

2. Ознакомиться в сочинении Лекорню, указанном на стр. 264, с отделом о классификации и исследовании механизмов.

3. Возвращаясь к упражнению 2 гл. IV, показать, что гелиоцентрическое движение луны представляет собой эпициклическое движение, для которого солнце служит центром неподвижной окружности, а земля — центром подвижной окружности; геоцентрическое движение другой планеты также есть эпициклическое или гипоциклическое в зависимости от того, будет ли это планета внутренняя или внешняя [1]). В том и другом случаях центром неподвижной окружности служит земля, а центром подвижной — солнце.

4. Показать, что в эпициклическом движении (в узком значении этого слова), в котором радиусы обоих кругов имеют одну и ту же длину R, траектории точек подвижной окружности выражаются уравнением $\rho = 2R(1 + \cos\theta)$, т. е. представляют собой кардиоиды (частный случай паскалевых улиток).

5. Рассмотрим плоское твердое движение, определяемое отрезком, концы которого A и B описывают равные окружности.

Предположим, что расстояние между центрами O и O' двух окружностей равняется движущемуся отрезку AB. Если в начальный момент отрезок AB параллелен OO', то движение сводится к параллельному перенесению (поступательное движение). Если же этот частный случай исключим, то полярными траекториями служат две равные гиперболы, расположенные во всякий момент симметрично относительно общей касательной в мгновенном центре вращения.

Неподвижная гипербола λ имеет фокусами точки O и O'; подвижная гипербола l имеет фокусами точки A и B.

6. Во всяком плоском твердом движении ускорения точек P, одинаково удаленных от центра ускорений A, наклонены к прямой AP под одним и тем же углом и имеют одинаковые абсолютные величины.

7. Если угловая скорость $\dot{\theta}$ твердого плоского движения имеет постоянное значение, то окружности с центром A, рассмотренные в предыдущем упражнении, вырождаются в прямые; ускорения движущихся точек направлены к центру ускорения.

8. Рассмотрим произвольное твердое плоское движение и остановимся на некотором моменте t. Если мы как-либо изменим закон движения (в его зависимости от времени) до или после рассматриваемого момента, то положение центра ускорений A изменится, мгновенный же центр I и окружность перегибов останутся те же.

---

[1]) Планета называется *внутренней* или *внешней* относительно земли в зависимости от того, является ли ее орбита внутренней или внешней по отношению к орбите земли. Внутренними планетами являются Меркурий и Венера; все остальные планеты, известные по настоящее время, суть *внешние*.