ГЛАВА VI.

# Общие основания кинематики системы.

## 1. Голономные системы и их возможные перемещения.

**1.** Помимо твердых фигур, которые с кинематической точки зрения представляют наиболее простой тип систем точек, ежедневный опыт представляет неисчислимое количество примеров изменяемых систем, которые в условиях движения подвергаются сгибаниям, растяжениям, сжатиям и т. п. При этом иногда оказывается, что движение некоторых точек системы определяет движение всех остальных; так, это имеет место, например, для твердых систем, движение которых определяется каждый раз движением трех точек, не расположенных на одной прямой; очень часто случается, что движения некоторых точек системы ограничивают свободу движения остальных.

Мы приходим, таким образом, к изучению движения таких систем, для которых во все время движения имеют место некоторые определенные соотношения между кинематическими признаками их (между их положениями, скоростями, ускорениями и т. д.). В частности, особенно замечательны такие системы, в которых эти ограничения связывают исключительно одновременные положения различных точек. В качестве наиболее простых случаев укажем точку, движение которой связано таким образом, что она должна двигаться по данной кривой или по данной поверхности; таково движение точки, бесчисленные положения которой зависят от одного или двух параметров:

$$P = P(q) \text{ или } P = P(q_1, q_2), \tag{1}$$

где параметром $q$ может служить, например, длина дуги данной кривой, отсчитываемая от определенной точки; параметрами $q_1, q_2$ могут служить криволинейные координаты, каким-либо образом определенные на заданной поверхности.

Если же эта кривая или поверхность — геометрическое место бесчисленного множества возможных положений точки — изменяется от момента к моменту, то вместо уравнения (1) данная точка связана уравнением вида:

$$P = P(q \mid t) \quad \text{или} \quad P = P(q_1, q_2 \mid t).$$

Становясь на более общую точку зрения, мы рассмотрим здесь систему произвольного числа $N$ точек $P_i$ ($i = 1, 2, 3, \ldots, N$), которые не могут передвигаться свободно независимо одна от другой, но связаны таким образом, что положения их определяются функциями некоторого числа $n$ произвольных параметров $q_1, q_2, \ldots, q_n$, а иногда и времени:

$$P_i = P_i(q_1, q_2, \ldots, q_n \mid t). \tag{2}$$

Если $x_i$, $y_i$, $z_i$ суть координаты точки $P_i$ относительно координатного триэдра системы, геометрические уравнения (2) развертываются в эквивалентные им $3N$ уравнения:

$$\begin{aligned} x_i &= x_i\,(q_1, q_2, \ldots, q_n \mid t) \\ y_i &= y_i\,(q_1, q_2, \ldots, q_n \mid t) \\ z_i &= z_i\,(q_1, q_2, \ldots, q_n \mid t) \end{aligned} \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, N), \tag{2'}$$

правые части которых представляют собою $3N$ функций от аргументов $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n$, а иногда и от $t$; мы будем предполагать, что эти функции в пределах определенной области значений их аргументов однозначны, конечны, непрерывны и допускают производные по крайней мере первого и второго порядка.

Связанная таким образом система точек называется *голономной* [1]); если при этом в уравнениях (2) или (2′) время $t$ не фигурирует, то говорят, что *связи не зависят от времени*. Произвольные параметры $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n$ называются *общими или лагранжевыми* координатами системы.

2. В заданный момент времени, т. е. для данного значения $t$ уравнения (2) и (2′), при изменении параметров $q_1, q_2, \ldots, q_n$ в области их значений, дают всевозможные *конфигурации* системы в рассматриваемый момент, т. е. всевозможные руппы $N$ точек пространства, в которых в этот момент могут быть помещены $N$ точек системы. Подробнее: каждой системе значений $q_1, q_2, \ldots, q_n$ отвечает одна конфигурация точек системы; всевозможным комбинациям этих значений (в области, в которой они изменяются) соответствуют всевозможные при этих связях конфигурации системы. Если связи зависят от времени, то конфигурации, которые возможны в один момент $t_1$, вообще говоря, не совпадают с конфигурациями, возможными в другой момент $t_2$. Всевозможные значения $n$ параметров $q_1, q_2, \ldots, q_n$ допускают $\infty^n$ комбинаций; соответственно этому количество конфигураций голономной системы в определенный момент не превышает $\infty^n$, оно составляет именно $\infty^n$ в том и только в том случае, когда с любым изменением координат $q_n$ изменяется и соответствующая конфигурация; а для того, чтобы это имело

[1]) Это название, происходящее от греческих слов ὅλος (целый), и νόμος (закон), указывает на то обстоятельство, что такого рода связь, как мы это лучше выясним в рубр. 4, разрешается в конечное число уравнений между координатами точек. Этот термин был введен знаменитым физиком и математиком Герцом (H. Hertz) (родился в Гамбурге в 1857 г., умер в Бонне в 1894 г.), который первый экспериментально воспроизвел электрические волны.

место, необходимо и достаточно, чтобы уравнения (2) разрешались относительно параметров $q_n$, т. е., как известно из анализа, чтобы якобиева матрица

$$\left\| \frac{\partial x_1}{\partial q_h}, \frac{\partial y_1}{\partial q_h}, \frac{\partial z_1}{\partial q_h}, \ldots, \frac{\partial x_N}{\partial q_h}, \frac{\partial y_N}{\partial q_h}, \frac{\partial z_N}{\partial q_h} \right\| \quad (h=1, 2, 3, \ldots, n) \qquad (2'')$$

имела ранг $n$.

Когда это последнее обстоятельство имеет место, то говорят, что $n$ есть *число степеней свободы* системы или что система имеет $n$ *степеней свободы*. Таким образом можно сказать, что число степеней свободы голономной системы есть число *существенных* или *независимых параметров*, от которых в момент *общего характера* [1]) зависят ее конфигурации.

Обыкновенно, когда говорят о лагранжевых координатах голономной системы, то предполагают, что эти координаты все существенны, т. е., что число их равно числу степеней свободы системы. Здесь следует отметить, что в выборе лангранжевых координат остается большой произвол: вместо определенных $n$ координат, можно взять $n$ других, связанных с первоначальными какими угодно $n$ уравнениями:

$$q'_k = q'_k\,(q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n) \qquad (k=1, 2, 3, \ldots, n),$$

при том, однако, условии, чтобы функциональный определитель

$$\left\| \frac{\partial q'_k}{\partial q_h} \right\| \qquad (h,\ k=1, 2, 3, \ldots, n)$$

не обращался тождественно в нуль в области значений параметров.

**3.** В течение всякого своего движения голономная система постепенно проходит через конфигурации, соответствующие последовательным моментам; поэтому движение будет определено, если лагранжевы координаты системы будут заданы в функции времени. Уравнения

$$q_h = q_h(t) \qquad (h=1, 2, \ldots, n),$$

которыми это выражается, называются *путевыми уравнениями* движения в лагранжевых координатах.

Для выражения состояния системы, т. е. скоростей $v_i$ отдельных ее точек $P_i$, нужно продиференцировать уравнение (2), принимая во внимание, что параметры представляют собой функции времени

$$v_i = \frac{dP_i}{dt} = \frac{\partial P_i}{\partial t} + \sum_{1}^{n}{}_h \frac{\partial P_i}{\partial q_h}\dot{q}_h \qquad (i=1, 2, 3, \ldots, N). \qquad (3)$$

---

1) Авторы часто употребляют термин „istante generico“, „общий момент“, „момент общего характера“, разумея под этим такой момент, в который не создается каких-либо исключительных условий или положений. Так, например, в применении к данному случаю это означает следующее: ранг матрицы (2″) вообще равен $n$; но в отдельных точках вследствие уничтожения определителей $n$-го порядка он может снижаться; момент „общего характера“ — это такой момент, в который такое снижение не имеет места. (*Ред.*)

Следует остановиться на важном частном случае голономных систем с одной степенью свободы и со связями, не зависящими от времени; в системах этого рода конфигурации зависят от одного единственного лагранжева параметра (не зависят от $t$):

$$P_i = P_i(q) \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, N).$$

Для такой системы, как говорят „с полной системой связей", траектории всех ее точек известны a priori, определению подлежит единственное путевое уравнение:

$$q = q\ (t),$$

т. е. закон движения во времени, по которому точки системы пробегают свои траектории.

4. Если матрица (2″) имеет ранг $n$, то, исключив $n$ лагранжевых координат из $3N$ скалярных уравнений (2′), получим ровно $3N - n$ независимых уравнений относительно $x_i, y_i, z_i$:

$$f_k\ (x_1, y_1, z_1, \ldots, x_N, y_N, z_N \,|\, t) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, 3N - n), \quad (4)$$

которые могут содержать время $t$, но могут его и не содержать; эти уравнения выражают аналитически те соотношения, которые связывают одновременные положения системы; они называются *уравнениями связей*, а короче, просто *связями*. Их число выражается разностью $3N - n$ между числом декартовых координат точек системы и числом лагранжевых координат (т. е. числом степеней свободы).

Обратно, если на систему $N$ точек $P_i$ налагается условие, чтобы координаты $x_i, y_i, z_i$ этих точек удовлетворяли определенному числу $l$ уравнений вида (4), то это система голономная. В самом деле, разрешая уравнения (4), которые мы предполагаем независимыми, относительно $l$ из числа $3N$ координат $x_i, y_i, z_i$, и принимая остальные $3N - l$ координат за лагранжевы параметры, мы получим как раз систему уравнений вида (2′). Отметим, что число степеней свободы $n = 3N - l$, т. е. равно разности между числом $3N$ декартовых координат точек этой системы и числом связей.

5. **Примеры голономных систем.** Число степеней свободы голономной системы, по определению, равно числу соответствующих (независимых) лагранжевых координат. На практике, когда внимание фиксируется на системе данной материальной структуры, всегда нетрудно непосредственно выяснить, представляет ли она собою голономную систему; для этого достаточно исследовать, определяются ли ее конфигурации в произвольно взятый момент определенным конечным числом независимых параметров. Если это имеет место, то такое число непосредственно определяет число степеней свободы системы. Этот критерий мы применим к некоторым особенно простым типам голономных систем.

Твердая система, движущаяся в плоскости, есть голономная система с 3 степенями свободы: для ее определения достаточно задать 2 параметра, устанавливающие положение одной из ее точек $M$, и еще 1 параметр, определяющий ориентацию системы относительно $M$.

Система, состоящая из двух твердых стержней, сочлененных шарниром, имеет в плоскости 4 степени свободы, ибо для опредления положения шарнира требуется 2 параметра, а 2 других определяют ориентации стержней. По таким же соображениям сочлененный плоский четырехсторонник также имеет 4 степени свободы.

**6.** Стержень, движущийся в пространстве, имеет 5 степеней свободы. В самом деле, чтобы установить конфигурацию такой системы, достаточно знать положение одной из ее точек $P$ и направление стержня; с другой стороны, известно, что нужно 3 параметра для определения положения точки и 2 параметра для определения направления прямой. Отсюда следует также, что число степеней свободы стержня сводится к 2, если точка $P$ остается неподвижной.

Для произвольного твердого тела число степеней свободы такое же, как и для триэдра, т. е. равно 6; 3 параметра нужны для определения начала, а 3 других — для ориентации осей (эйлеровы углы).

Если система имеет при этом неподвижную точку, то число параметров, а следовательно, число степеней свободы, очевидно, сводится к 3. Из предыдущей рубрики следует также, что твердое тело имеет 3 степени свободы и в том случае, если оно должно двигаться параллельно плоскости.

Твердое тело, которое прикреплено к крюку, скользящему по проволоке, имеет 4 степени свободы: 1 для определения положения крюка и 3 для ориентации твердого тела относительно него.

Тело с осью, скользящей по себе самой, имеет только 2 степени свободы: одну для установления смещения оси, определяя таковое расстоянием некоторой подвижной ее точки от неподвижной, а другую—для ориентации твердого тела вокруг самой оси.

Наконец, твердое тело $C$, которое должно постоянно соприкасаться в одной точке с другим твердым телом $C_1$, имеет 5 степеней свободы. В самом деле, 2 параметра необходимы для определения точки соприкосновения на поверхности тела $C$ и 2 — для определения ее положения на поверхности тела $C_1$; с другой стороны, если исключим случаи, когда соприкосновение происходит в особенной точке поверхности, то нужен еще только 1 параметр для ориентации одного тела относительно другого вокруг общей их нормали.

Закончим, наконец, определением числа степеней свободы велосипеда, стоящего на плоскости дороги [1]). Для определения

---

[1]) При этом мы оставляем в стороне связи *не голономные*, которые, как увидим в следующем параграфе, нужно было бы учесть, если бы колеса должны были (по крайней мере в нормальных условиях) катиться без скольжения.

положения рамы необходимы 4 параметра: 2 для определения положения какой-нибудь точки следа на плоскости дороги, 1 для определения направления этого следа и 1 для определения наклона рамы; 2 дальнейших параметра необходимы для определения положения переднего колеса; положения заднего колеса, цепи и руля зависят только от 1 параметра. Наконец, 2 параметра необходимы для определения положения педалей; таким образом число степеней свободы достигает 9.

7. Все голономные системы, рассмотренные в рубр. 5 и 6, представляют собою твердые тела или твердые части, различным образом скрепленные между собою. Другие типы систем, с которыми нам приходится встречаться в ежедневной практике, неголономны, как, например, совершенно гибкая нить, которую можно изогнуть по любой кривой. Совершенно ясно, что мы не можем локализировать все точки такой нити при помощи конечного числа параметров.

С другой стороны, даже системы твердые или составленные из твердых частей часто могут быть неголономными, если они подчинены связям, зависящим не только от взаимного положения точек, но и от соответствующих скоростей. В таких условиях, как мы увидим в рубр. 12, находится твердый шар, который должен катиться по плоскости без скольжения.

8. **Избыточные лагранжевы координаты.** Если голономная система $S$, определяемая независимыми лагранжевыми координатами $q_1, q_2, \ldots, q_n$ и имеющая поэтому $n$ степеней свободы, подвергается действию новых голономных связей, то это получает выражение в том, что параметры $q_n$ связываются одним или несколькими уравнениями:

$$f_k(q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n|(t) = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \ldots, l'), \qquad (4')$$

которые мы можем предполагать независимыми друг от друга; время $t$ может входить в эти уравнения, может и не входить. Новая система $S'$, которую мы, таким образом, получаем, все еще будет голономной. Число степеней ее свободы сводится к $n - l'$; это становится ясным, если заметим, что из уравнения (4′) можно выразить $l'$ параметров $q_n$ через остальные $n - l'$, и эти последние или $n - l'$ независимых функций от них можно принять за лагранжевы координаты системы $S'$.

Но в такого рода случаях, особенно когда первоначальные параметры $q_n$ имеют и для системы $S'$ отчетливое геометрическое значение, часто бывает все же целесообразно сохранить те же координаты $q_n$ также для системы $S'$; конечно, они теперь уже не будут независимыми, а будут постоянно связаны уравнениями (4′). В этом случае параметры $q_n$ называются *избыточными* лагранжевыми координатами.

В частности, для всякой голономной системы, состоящей из $N$ точек, можно принять их декартовы координаты $x_i, y_i, z_i$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, N)$ за $3N$ избыточных координат; если число степеней есть $n$, то эти координаты связаны между собой (а иногда и с временем) $l=3N-n$ уравнениями (ср. рубр. 4) вида:

$$f_k(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_N, y_N, z_N \mid t)=0 \qquad (k=1, 2, \ldots, l).$$

**9. Возможные перемещения голономной системы.** Свободная точка $P$ может в каждый определенный момент $t$ подвергнуться совершенно произвольному (элементарному или бесконечно малому) перемещению $dP=vdt$ от своего начального положения.

В самом деле, каков бы ни был заданный вектор $v$, мы всегда можем представить себе равномерное прямолинейное движение

$$\overline{P_0P}=v\,(t-t_0)$$

или любое другое движение, уравнение которого получается прибавлением ко второй части слагаемого вида $(t-t_0)^2 c$, где $c$ есть произвольный вектор (хотя бы даже зависящий от времени). При этом движении точка $P$ получит за бесконечно малый промежуток времени вышеуказанное элементарное смещение.

Но совершенно ясно, что связанная точка или связанная система точек лишена такой абсолютной свободы перемещения. Если движущаяся голономная система в момент $t$ приняла определенную конфигурацию (одну из возможных для нее в этот момент), то в следующий элемент времени $t+dt$ она может перейти только в такую другую конфигурацию, которая для нее допустима в момент $t+dt$. Всякое бесконечно малое смещение голономной системы, которое переводит ее из какой-либо конфигурации $C$, возможной для нее в момент $t$, в конфигурацию $C'$, возможную для этой системы в момент $t+dt$, называется *возможным перемещением* этой системы от исходной конфигурации $C$ в момент $t$.

Положим, что голономная система $N$ точек определена параметрическими уравнениями:

$$P_i=P_i\,(q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n \mid t) \quad (i=1, 2, 3, \ldots, N). \tag{2}$$

В произвольный момент она может занимать любое положение $C$, соответствующее произвольно выбранным значениям параметров $q_h$. Любая конфигурация $C'$, сколь угодно близкая к $C$, в последующий момент $t+dt$ может быть получена, если мы дадим координатам $q_h$ и времени $t$ произвольные, друг от друга независящие наращения $dq_h$ и $dt$. Выражая явно перемещения отдельных точек $dP_i$, будем иметь:

$$P_i+dP_i=P_i(q_1+dq_1, q_2+dq_2, \ldots, q_n+dq_n \mid t+dt).$$

Развертывая правые части в ряды, почленно вычитая соответствующие уравнения (2) и отбрасывая члены порядка выше первого, получим:

$$dP_i=\frac{\partial P_i}{\partial q_1}dq_1+\frac{\partial P_i}{\partial q_2}dq_2+\ldots+\frac{\partial P_i}{\partial q_n}dq_n+\frac{\partial P_i}{\partial t}dt. \tag{5}$$

Это и есть аналитическое выражение наиболее общего возможного перемещения системы в момент $t$ (исходящего от конфигурации с координатами $q_h$); бесконечно малые наращения $dq_h$ и $dt$ рассматриваем как совершенно независимые друг от друга.

Теперь рассмотрим случай голономной системы, отнесенной к избыточным лагранжевым координатам. Положения ее точек попрежнему выражаются уравнениями (2); но координаты этом случае связаны $l'$ независимыми уравнениями (4); эти последние в момент $t+dt$ будут иметь вид:

$$f_k(q_1+dq_1, q_2+dq_2+\ldots+q_n+dq_n \mid t+dt)=0 \ (k=1, 2, \ldots, l');$$

развертывая левые части в ряды, вычитая почленно соответствующие уравнения (4′) и опуская члены порядка выше первого, получим:

$$\frac{\partial f}{\partial q_1}dq_1+\frac{\partial f}{\partial q_2}dq_2+\ldots+\frac{\partial f}{\partial q_n}dq_n+\frac{\partial f}{\partial t}dt=0 \ (k=1, 2, \ldots, l'). \quad (6)$$

Мы заключаем отсюда, что в этом случае избыточных координат наиболее общее перемещение системы в момент $t$ выражается также уравнениями (5), но бесконечно малые наращения $dq_1, dq_2, \ldots, dq_n$ и $dt$ в этом случае уже не являются независимыми,—напротив, они связаны $l'$ уравнениями (6). Отсюда вытекает, что при данных значениях $t$ и всех $q_h$ (т. е. в данный момент, при данной исходной конфигурации) и при данном $dt$ независимыми остаются только $n-l'$ наращений $dq_h$ (т. е. столько, сколько в этом случае есть степеней свободы); остальные же наращения $dq_h$ уже определяются в зависимости от них уравнениями (6).

В частности, если за избыточные координаты системы примем декартовы координаты ее точек, а уравнения связи имеют вид

$$f_k(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_N, y_N, z_N \mid t)=0 \qquad (k=1, 2, \ldots, l), \quad (4)$$

то компоненты $dx_i$, $dy_i$, $dz_i$ по осям перемещения каждой отдельной точки $P_i$ при любом возможном перемещении системы характеризуются уравнениями:

$$\sum_{1}^{N}{}_i\left(\frac{\partial f_k}{\partial x_i}dx_i+\frac{\partial f_k}{\partial y_i}dy_i+\frac{\partial f_k}{\partial z_i}dz_i\right)+\frac{\partial f_k}{\partial t}dt=0 \quad (k=1, 2, \ldots, l). \quad (4')$$

## 2. Неголономные системы.

**10.** Из последнего замечания предыдущей рубрики следует, что в тех случаях, когда на голономную систему, выраженную в независимых лагранжевых координатах $q_1, q_2, \ldots, q_n$, налагается дальнейшая голономная связь:

$$f(q_1, q_2, \ldots, q_n \mid t)=0, \quad (6')$$

это влечет за собой во всякий момент ограничение не только для конфигураций системы, но и для возможных ее перемещений.