Это и есть аналитическое выражение наиболее общего возможного перемещения системы в момент t (исходящего от конфигурации с координатами q_h); бесконечно малые наращения dq_h и dt рассматриваем как совершенно независимые друг от друга.

Теперь рассмотрим случай голономной системы, отнесенной к избыточным лагранжевым координатам. Положения ее точек попрежнему выражаются уравнениями (2); но координаты этом случае связаны l' независимыми уравнениями (4); эти последние в момент $t+dt$ будут иметь вид:

$$f_k(q_1+dq_1, q_2+dq_2+\ldots+q_n+dq_n \mid t+dt)=0 \; (k=1, 2, \ldots, l');$$

развертывая левые части в ряды, вычитая почленно соответствующие уравнения (4′) и опуская члены порядка выше первого, получим:

$$\frac{\partial f}{\partial q_1}dq_1+\frac{\partial f}{\partial q_2}dq_2+\ldots+\frac{\partial f}{\partial q_n}dq_n+\frac{\partial f}{\partial t}dt=0 \; (k=1, 2, \ldots, l'). \quad (6)$$

Мы заключаем отсюда, что в этом случае избыточных координат наиболее общее перемещение системы в момент t выражается также уравнениями (5), но бесконечно малые наращения $dq_1, dq_2, \ldots, dq_n$ и dt в этом случае уже не являются независимыми,—напротив, они связаны l' уравнениями (6). Отсюда вытекает, что при данных значениях t и всех q_h (т. е. в данный момент, при данной исходной конфигурации) и при данном dt независимыми остаются только $n-l'$ наращений dq_h (т. е. столько, сколько в этом случае есть степеней свободы); остальные же наращения dq_h уже определяются в зависимости от них уравнениями (6).

В частности, если за избыточные координаты системы примем декартовы координаты ее точек, а уравнения связи имеют вид

$$f_k(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_N, y_N, z_N \mid t)=0 \qquad (k=1, 2, \ldots, l), \quad (4)$$

то компоненты dx_i, dy_i, dz_i по осям перемещения каждой отдельной точки P_i при любом возможном перемещении системы характеризуются уравнениями:

$$\sum_1^N{}_i\left(\frac{\partial f_k}{\partial x_i}dx_i+\frac{\partial f_k}{\partial y_i}dy_i+\frac{\partial f_k}{\partial z_i}dz_i\right)+\frac{\partial f_k}{\partial t}dt=0 \quad (k=1, 2, \ldots, l). \quad (4')$$

2. Неголономные системы.

10. Из последнего замечания предыдущей рубрики следует, что в тех случаях, когда на голономную систему, выраженную в независимых лагранжевых координатах $q_1, q_2, \ldots, q_n$, налагается дальнейшая голономная связь:

$$f(q_1, q_2, \ldots, q_n \mid t)=0, \quad (6')$$

это влечет за собой во всякий момент ограничение не только для конфигураций системы, но и для возможных ее перемещений.

Это последнее ограничение выражается уравнением:

$$\frac{\partial f}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial f}{\partial q_2} dq_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial q_n} dq_n + \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0. \tag{7}$$

Разделив его на dt, мы придадим ему вид:

$$\frac{\partial f}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial f}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \frac{\partial f}{\partial q_3} \dot{q}_3 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial q_n} \dot{q}_n + \frac{\partial f}{\partial t} = 0. \tag{7'}$$

Это последнее уравнение представляет собой линейную зависимость (неоднородную, если связь зависит от времени) между производными $\dot{q}_n$, т. е. так называемыми *скоростями* системы в отношении лагранжевых координат. Вообще, можно сказать, что каждая голономная связь налагает на систему также *связь подвижности*. Это замечание ведет к новому обобщению, которое имеет не только теоретическое значение, но и реализуется на практике, как мы это увидим ниже (рубр. 12). Обобщение это заключается в том, что можно вводить также связи подвижности, непосредственно выражаемые уравнениями типа:

$$\sum_1^n {}_h a_h dq_h + b\, dt = 0, \tag{8}$$

или по разделении на dt:

$$\sum_1^n {}_h a_h \dot{q}_h + b = 0, \tag{8'}$$

где a_h и b суть функции координат q_h, а иногда и t; при этом предполагается, что уравнение (8) не может быть выведено путем диференцирования уравнения вида (6).

Очевидно, всякое соотношение вида (8) само по себе [независимо от того, получается ли оно диференцированием из конечного уравнения (6) или нет] не налагает никаких ограничений на самое положение системы; тем более можно считать обоснованным присвоенное такому соотношению название связи подвижности.

В качестве дальнейшего обобщения можно было бы представить себе еще более сложные связи подвижности, например нелинейные зависимости между производными $\dot{q}_h$ или же добавочные члены, содержащие производные от q_h порядка более высокого, чем первый; но до сих пор неизвестны *конкретно осуществимые* материальные системы такого типа [1]).

Всякая связь подвижности (8), рассматриваемая сама по себе (т. е. независимо от того, выводится ли она путем диференцирования из конечного уравнения или нет), называется *неголономной*. В форме (8) она называется *однородной* в том случае, если функция b тождественно равна 0, и *неоднородной* — в противном слу-

[1]) См. по этому вопросу *Delassus*, Leçons sur la dynamique des systèmes matériels, Paris, Hermann, 1913.

чае. Вместе с тем всякая система, подчиненная одной или нескольким неголономным связям, также называется *неголономной*.

В общем, небесполезно будет еще раз отметить, что существенная разница между голономными и неголономными связями коренится в том, что последние не налагают никаких ограничений на конфигурацию системы, но устанавливают только ограничение для возможных ее перемещений, т. е. вводят ограничения ее подвижности.

Отметим, наконец, что система называется *совершенно неголономной* или *собственно неголономной*, если связи вида (8′), которым она подчинена, таковы, что не только ни одно из уравнений (8′) не может быть получено диференцированием одного конечного уравнения между параметрами $q_1, q_2, \ldots, q_n$, но вообще не существует ни одного уравнения вида:

$$F(q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n | t) = 0, \tag{9}$$

диференцируя которое мы получили бы соотношение между диференциалами, удовлетворяющееся тождественно в силу уравнений (8), т. е. представляющее собой линейную комбинацию их [1]).

11. Соображения предыдущей рубрики, естественно, могут найти себе приложения и в том случае, когда система отнесена к декартовым координатам. Как уже было отмечено в рубр. 9, всякая голономная связь вида (4) устанавливает зависимость между компонентами dx_i, dy_i, dz_i элементарных смещений dP_i отдельных точек системы; это соотношение имеет вид (4′), т. е. имеет линейную, в наиболее общем случае неоднородную, форму. Тот же линейный характер в более общей форме имеет и всякая неголономная связь, которая поэтому может быть написана в форме:

$$\sum_{1}^{N}{}_i (a_i' \, dx_i + a_i'' \, dy_i + a_i''' \, dz_i) = b \, dt,$$

где a_1', a_1'', a_1''', суть данные функции координат, а иногда и времени. Поэтому, если введем N векторов a_i с компонентами a_1', a_1'', a_1''', то предыдущему соотношению можно придать вид:

$$\sum_{1}^{N}{}_i a_i \, dP_i = b \, dt,$$

или, в более сжатой форме:

$$B(dP) = b \, dt.$$

[1]) Припомним, что голономная система, по определению, может в любой момент принимать любую доступную ей в этот момент конфигурацию; поэтому конечное соотношение, способное заменить одно из уравнений (8′), непременно должно содержать произвольные постоянные, располагая которыми можно удовлетворить уравнению в любой момент, при любой конфигурации.

Здесь B представляет собой линейный оператор относительно элементарных смещений dP. Разделяя обе части этого равенства на dt, получим:

$$B(v) = b;$$

это, очевидно, есть декартова форма любого соотношения (8′).

12. Пример совершенно неголономной системы. Таковой является, как мы уже упомянули в рубр. 7, твердая сфера S, поставленная в такие условия, что она должна катиться по неподвижной плоскости *без скольжения.*

Чтобы это доказать, дадим этой связи формальное выражение. За плоскость, по которой сфера катится, примем плоскость $\zeta = 0$ координатного триэдра и направим ось ζ в ту сторону, в которой лежит сфера S; третья координата центра O сферы будет поэтому постоянно равна ее радиусу R. Чтобы определить положение сферы, будет, очевидно, достаточно, во-первых, установить первые 2 координаты α и β центра O, или,—что то же,—точки соприкосновения C сферы S с плоскостью $\zeta = 0$, а во-вторых, установить ориентацию некоторого триэдра, неразрывно связанного со сферой, относительно неподвижного триэдра; за начало подвижного триэдра примем центр O; если θ, φ и ψ суть эйлеровы углы (III, рубр. 29—31), ориентирующие подвижную сферу, то лагранжевыми координатами нашей системы будут служить 5 параметров:

$$\alpha,\ \beta,\ \theta,\ \varphi,\ \psi.$$

Каждой системе значений этих параметров отвечает вполне определенное положение сферы в ее соприкосновении с плоскостью (конфигурация системы); если же 5 координат положить равными произвольно взятым функциям времени и сверх того припомнить, что $\gamma = R$, то мы получим конечные уравнения движения сферы S, постоянно касающейся плоскости $\zeta = 0$. Но это движение, вообще говоря, не будет чистым качением; напротив того, оно будет сопровождаться некоторым скольжением сферы по плоскости.

В самом деле, представим себе произвольное элементарное перемещение сферы от момента t до момента $t+dt$. Как мы знаем (III, рубр. 32), если мы за центр приведения примем точку (мгновенного) соприкосновения C сферы с плоскостью, то это движение слагается из бесконечно малого вращения вокруг прямой, выходящей из C, и некоторого элементарного поступательного смещения; поскольку соприкосновение сферы с плоскостью поддерживается во все время движения, это поступательное смещение непременно должно произойти параллельно этой плоскости. Чтобы имело место чистое вращение, необходимо и достаточно, чтобы это поступательное смещение было равно нулю во все время движения; это означает, что во все время движения должна быть равна нулю скорость v_C точки соприкосновения C, которая вообще меняет свое положение как на неподвижной плоскости, так и на сфере.

Самое разложение выражается формулой:

$$\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{v}_0 + [\overline{\omega}\, \overline{OC}] = 0,$$

где $\boldsymbol{v}_0$ и $\overline{\omega}$ суть характеристические векторы движения сферы относительно центра O.

Чтобы придать этому векториальному уравнению декартову форму, заметим, что оба вектора v_0 и $[\overline{\omega}\, \overline{OC}]$ параллельны неподвижной плоскости $\zeta = 0$: первый потому, что он представляет скорость центра O, который движется параллельно этой плоскости, второй же, по определению, перпендикулярен к вектору $\overline{OC}$, который, в свою очередь, перпендикулярен к той же плоскости.

Поэтому предыдущее векторное уравнение, будучи спроектировано на неподвижные оси, приводит только к двум скалярным уравнениям, соответствующим неподвижным осям ξ и η. Заметим теперь, что компоненты вектора $\boldsymbol{v}_0$ по неподвижным осям суть $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$, 0; если поэтому обозначим через π, χ, ρ компоненты угловой скорости $\overline{\omega}$ по неподвижным осям, то эти два уравнения примут вид:

$$\dot{\alpha} - R\chi = 0, \qquad \dot{\beta} + R\pi = 0. \tag{10}$$

Таковы уравнения *связи чистого качения*. Чтобы придать им раскрытую форму, припомним (III, рубр. **32**), что

$$\left.\begin{aligned} \pi &= \dot{\theta}\cos\psi + \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi, \\ \chi &= \dot{\theta}\sin\psi - \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi; \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

эти выражения нужно было бы подставить в уравнения (10), чтобы получить связь качения в явной форме. Но чтобы обнаружить, что эта связь совершенно неголономная, достаточно принять во внимание, что из уравнений (11) следует:

$$\frac{\partial\pi}{\partial\psi} = -\chi, \qquad \frac{\partial\chi}{\partial\psi} = \pi. \tag{12}$$

В самом деле, нужно обнаружить, что не может существовать никакое конечное соотношение вида (7) между лагранжевыми координатами α, β, θ, φ и ψ и временем, диференцируя которое по времени мы могли бы получить результат, удовлетворяющийся тождественно в силу уравнений (10). Однако, если бы такое соотношение существовало, то оно неизбежно должно было бы содержать α или β; в самом деле, в противном случае, диференцируя его относительно t, мы получили бы линейную зависимость (иногда неоднородную) между производными $\dot{\theta}$, $\dot{\varphi}$, $\dot{\psi}$; между тем, даже при наличии уравнения (10) эти производные не зависят друг от друга. Мы можем поэтому ограничиться исследованием, возможно ли такое соотношение, которое явным образом содержит β, а потому может быть представлено в виде:

$$\beta = f(\alpha, \theta, \varphi, \psi | t). \tag{13}$$

Диференцируя это уравнение по t, получаем:

$$\dot{\beta} = \frac{\partial f}{\partial \alpha}\dot{\alpha} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\dot{\theta} + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\dot{\varphi} + \frac{\partial f}{\partial \psi}\dot{\psi} + \frac{\partial f}{\partial t};$$

это уравнение должно было бы удовлетворяться тождественно для всех возможных значений α, β, θ, φ, ψ, $\dot{\theta}$, $\dot{\varphi}$, $\dot{\psi}$ и t в области, в которой имеет место соотношение (13), коль скоро мы подставили бы вместо $\dot{\alpha}$ и $\dot{\beta}$ их выражения (10). Иными словами, *должно было бы иметь место тождество*:

$$-R\pi = \frac{\partial f}{\partial \alpha}R\chi + \frac{\partial f}{\partial \theta}\dot{\theta} + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\dot{\varphi} + \frac{\partial f}{\partial \psi}\dot{\psi} + \frac{\partial f}{\partial t}. \tag{14}$$

Между тем, продиференцировав это соотношение по $\dot{\psi}$, мы пришли бы к тождеству:

$$\frac{\partial f}{\partial \psi} = 0,$$

так как ни одна из функций π, χ и f не зависит от этой переменной. Отсюда следует, что f не может зависеть от ψ. Диференцируя теперь уравнение (14) по ψ и учитывая соотношение (12), мы пришли бы к тождеству:

$$R\chi = R\frac{\partial f}{\partial \alpha}\pi.$$

Заменяя здесь χ и π их выражениями (11), мы расщепили бы в силу независимости $\dot{\theta}$ и $\dot{\varphi}$ это *уравнение на два других*:

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha}\sin\psi - \cos\psi = 0, \qquad \sin\psi + \frac{\partial f}{\partial \alpha}\cos\psi = 0,$$

которые во всяком случае друг другу противоречат.

Таким образом установлено, что связь, требующая чистого качения сферы по плоскости, неголономна в собственном смысле слова.

13. Подставляя в уравнение (10) вместо π и χ их выражения (11), мы получаем два линейных *однородных* уравнения, связывающих производные $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$, $\dot{\theta}$, $\dot{\psi}$ лагранжевых координат; мы можем поэтому сказать, что случай, рассмотренный в предыдущей рубрике, представляет собою пример *однородной* неголономной связи.

Но отсюда легко перейти, слегка изменяя условия, к примеру неоднородной связи, также неголономной.

Возьмем снова твердую сферу S предыдущей рубрики, но предположим, что твердая плоскость, по которой сфера должна катиться без скольжения, также движется в пространстве; для простоты мы ограничимся случаем, когда это движение плоскости являетс поступательным и имеет скорость $\bar{\tau}$ с компонентами τ_1, τ_2, τ_3 относительно обычных осей ξ, η, ζ. Оставаясь при обозначениях предыдущей рубрики, мы получим, что центр сферы O, который должен оставаться на расстоянии R от опорной плоскости, уже не сохраняет постоянной координату γ; напротив того, она выражается формулой:

$$\gamma = R + \int_{t_0}^{t} \tau_3 dt.$$

Если попрежнему обозначим через C точку соприкосновения сферы с опорной плоскостью, то условия чистого качения сферы можно будет выразить тем, что скорость точки C на сфере:

$$v_C = v_0 + [\bar{\omega}\,\overline{OC}]$$

должна совпадать со скоростью $\bar{\tau}$ той же точки на плоскости, так что

$$v_0 + [\bar{\omega}\,\overline{OC}] = \bar{\tau}.$$

С другой стороны, так как первые две компоненты левой части выражаются, как в предыдущей рубрике, через $\dot{\alpha} - R\chi$, $\dot{\beta} + R\pi$, а третья $\dot{\gamma} = \tau_3$, то это векторное уравнение, будучи спроектировано на оси координат, даст одно тождество и два уравнения:

$$\dot{\alpha} - R\chi = \tau_1, \quad \dot{\beta} + R\pi = \tau_2.$$

В силу соотношений (11) эти два линейные уравнения неоднородны относительно $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$, $\dot{\theta}$, $\dot{\varphi}$; отсюда мы заключаем, что типичный пример неголономной и неоднородной связи представляет качение одного твердого тела по другому, движущемуся по определенному предуказанному закону.

3. Виртуальные перемещения.

14. Голономные виртуальные перемещения системы. Как увидим ниже, в механике часто существенно важно, кроме действительно возможных перемещений голономной системы, рассматривать некоторые воображаемые перемещения, которые способны перевести систему из одной ее конфигурации в другую, бесконечно близкую, но *относящуюся к тому же моменту*. Всякое такого рода перемещение называется *виртуальным перемещением* [1]) голономной системы.

---

[1]) Это понятие, несколько своеобразное, но чрезвычайно важное, повидимому, нуждается в несколько более обстоятельном пояснении. Положим, что система S в момент t занимает некоторую возможную в этот момент при существующих связях конфигурацию P. Пусть P_1 будет конфигурация, бесконечно близкая к P и возможная в *тот же* момент τ. Перемещение системы S из конфигурации P в P_1 и называют ***виртуальным перемещением ее***. Возможно ли это перемещение в действительности осуществить? Для этого потребовалось бы некоторое время Δt. Если связь не зависит от времени, то