кости являетс поступательным и имеет скорость $\bar{\tau}$ с компонентами τ_1, τ_2, τ_3 относительно обычных осей ξ, η, ζ. Оставаясь при обозначениях предыдущей рубрики, мы получим, что центр сферы O, который должен оставаться на расстоянии R от опорной плоскости, уже не сохраняет постоянной координату γ; напротив того, она выражается формулой:

$$\gamma = R + \int_{t_0}^{t} \tau_3 dt.$$

Если попрежнему обозначим через C точку соприкосновения сферы с опорной плоскостью, то условия чистого качения сферы можно будет выразить тем, что скорость точки C на сфере:

$$v_C = v_0 + [\overline{\omega}\ \overline{OC}]$$

должна совпадать со скоростью $\bar{\tau}$ той же точки на плоскости, так что

$$v_0 + [\overline{\omega}\ \overline{OC}] = \bar{\tau}.$$

С другой стороны, так как первые две компоненты левой части выражаются, как в предыдущей рубрике, через $\dot{\alpha} - R\chi$, $\dot{\beta} + R\pi$, а третья $\dot{\gamma} = \tau_3$, то это векторное уравнение, будучи спроектировано на оси координат, даст одно тождество и два уравнения:

$$\dot{\alpha} - R\chi = \tau_1, \quad \dot{\beta} + R\pi = \tau_2.$$

В силу соотношений (11) эти два линейные уравнения неоднородны относительно $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$, $\dot{\theta}$, $\dot{\varphi}$; отсюда мы заключаем, что типичный пример неголономной и неоднородной связи представляет качение одного твердого тела по другому, движущемуся по определенному предуказанному закону.

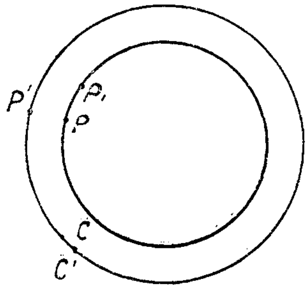
3. Виртуальные перемещения.

14. Голономные виртуальные перемещения системы. Как увидим ниже, в механике часто существенно важно, кроме действительно возможных перемещений голономной системы, рассматривать некоторые воображаемые перемещения, которые способны перевести систему из одной ее конфигурации в другую, бесконечно близкую, но *относящуюся к тому же моменту*. Всякое такого рода перемещение называется *виртуальным перемещением* [1]) голономной системы.

[1]) Это понятие, несколько своеобразное, но чрезвычайно важное, повидимому, нуждается в несколько более обстоятельном пояснении. Положим, что система S в момент t занимает некоторую возможную в этот момент при существующих связях конфигурацию P. Пусть P_1 будет конфигурация, бесконечно близкая к P и возможная в *тот же* момент τ. Перемещение системы S из конфигурации P в P_1 и называют ***виртуальным перемещением ее***. Возможно ли это перемещение в действительности осуществить? Для этого потребовалось бы некоторое время Δt. Если связь не зависит от времени, то

Если связи не зависят от времени, как это например, имеет место для твердых систем, то возможные конфигурации системы во всем их комплексе, по существу, остаются теми же во все последовательные моменты; таким образом всякое виртуальное перемещение в то же время является возможным и обратно.

Но если связи зависят от времени, то дело обстоит иначе: конфигурации системы вообще меняются от момента к моменту; виртуальное перемещение, которое переводит систему из одной конфигурации в другую, бесконечно близкую, но относящуюся к тому же моменту (т. е. могущую иметь место только в тот же момент), может не соответствовать действительно осуществимому движению. Иными словами, оно не является действительно возможным перемещением, а только воображаемым.



Фиг. 73.

Представим себе, например, в плоскости точку, подчиненную связи, в силу которой она должна оставаться на окружности, центр которой находится в постоянной точке O, но радиус которой с течением времени постоянно возрастает.

Пусть C и C' будут конфигурации этой окружности в последовательные моменты t и $t+dt$; представим себе точку помещенной в момент t в положение P на окружности C. Возможное перемещение должно будет переместить ее из P в бесконечно близкое положение P' на окружности C'; между тем, виртуальное перенесение должно будет переместить точку P в положение P_1, хотя и бесконечно близкое к P, но расположенное на той же окружности C.

15. Чтобы отличать виртуальные перемещения от возможных, первые обозначаются буквой δ вместо d; таким образом, если система голономна, то виртуальное смещение системы заключается в том, что каждая ее точка P_i претерпевает смещение δP_i, компоненты которого по осям обозначаем через δx_i, δy_i, δz_i.

Рассуждая, как и в случае возможных перемещений, с тем только различием, что время здесь не меняется, мы вычисляем виртуальные перемещения в лагранжевых координатах:

$$\delta P_i = \sum_1^n \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \delta q_h; \quad (i = 1, 2, \ldots, N); \tag{15}$$

конфигурация будет для нашей системы возможна и в момент $t+\Delta t$, поэтому в это новое положение (в эту конфигурацию) ее возможно будет перевести; виртуальное положение будет вместе с тем возможным. Но если связи меняются со временем, то конфигурация P_1 может оказаться для нашей системы в момент $t+dt$ уже невозможной; виртуальное перемещение будет неосуществимо, оно не принадлежит к числу действительно возможных перемещений системы. Это и изложено в тексте в несколько более сжатой форме, но пояснено примером. (*Ред.*)

эти линейные соотношения носят однородный характер в элементарных вариациях (произвольных и независимых) δq_h лагранжевых координат, и эта однородность сохраняется здесь даже в том случае, когда связи зависят от времени.

Остановимся еще на случае, когда координаты q_h избыточны, а ограничения, которым они подчинены, выражаются уравнениями:

$$f_k(q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n \mid t) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, l').$$

В этом случае можно рассуждать так же, как в рубр. 9, учитывая только, что теперь необходимо положить $dt = 0$; мы придем к заключению, что и в этом случае возможные перемещения выражаются уравнениями (15), но вариации δq_h теперь уже не являются произвольными и независимыми, а связаны между собою системой l' линейных однородных уравнений:

$$\frac{\partial f_k}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial f_k}{\partial q_2}\delta q_2 + \frac{\partial f_k}{\partial q_3}\delta q_3 + \ldots + \frac{\partial f_k}{\partial q_n}\delta q_n = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, l').$$

Возвращаясь к случаю, когда лагранжевы координаты q_h независимы, мы можем из однородного и линейного характера уравнения (15) вывести два простых, но весьма важных следствия.

Если некоторым совершенно произвольно выбранным значениям вариаций δq_h в силу соотношений (15) соответствует перемещение δP_i, то те же уравнения дают для вариаций $-\delta q_h$ перемещения $-\delta P_i$; это значит, голономная система во всякий момент допускает от всякой исходной конфигурации вместе с виртуальным перемещением δP_i также и противоположное смещение $-\delta P_i$, или, как обыкновенно говорят, для всякой голономной системы *виртуальные перемещения обратимы.*

Это соотношение тем более заслуживает внимания, что для систем неголономных, как мы увидим ниже, могут существовать также и необратимые виртуальные перемещения.

Из линейной формы уравнений (15) следует также, что двум виртуальным перемещениям

$$\delta_1 P_i = \sum_{1}^{n}{}_h \frac{\partial P_i}{\partial q_h}\delta_1 q_h, \quad \delta_2 P_i = \sum_{1}^{n}{}_h \frac{\partial P_i}{\partial q_h}\delta_2 q_h \quad (i = 1, 2, \ldots, N)$$

отвечает еще виртуальное перемещение

$$\delta_1 P_i + \delta_2 P_i = \sum_{1}^{n}{}_h \frac{\partial P_i}{\partial q_h}(\delta_1 q_h + \delta_2 q_h) \quad (i = 1, 2, \ldots, N),$$

которое получается из первых путем почленного их сложения. Это значит: *складывая два виртуальных перемещения одной и той же конфигурации системы, мы получаем также виртуальное перемещение.*

16. Виртуальные перемещения твердой системы. Связи твердости выражаются уравнениями вида:

$$(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2 = \text{const};$$

отсюда ясно, что эти связи голономны и не зависят от времени. Поэтому для всякой твердой системы виртуальные перемещения не отличаются от возможных, действительно осуществимых перемещений. Мы знаем (III, рубр. 22), что эти последние все принадлежат типу:

$$dP = dO + [\overline{\omega}\, dt\ \overline{QP}], \tag{16}$$

где dO представляет смещение центра приведения, а $\overline{\omega}\, dt$ — элементарное вращение вокруг мгновенной оси, проходящей через точку O.

Если твердая система совершенно свободна, т. е. подчинена исключительно выраженным выше условиям твердости, то оба бесконечно малых вектора $\overline{dO}$ и $\overline{\omega}\, dt$ могут быть выбраны совершенно произвольно: поэтому уравнение (16) в сводном виде выражает также все виртуальные перемещения твердой системы в функции от двух произвольных векторов dO и $\overline{\omega}\, dt$. Если заметим, что каждый вектор зависит от трех параметров, например от своих компонент, то придем к заключению, что для характеристики перемещений твердой системы, подчиненной только связям твердости, нужны шесть произвольных элементов (бесконечно малых, поскольку они происходят от бесконечно малых векторов). Это можно было предвидеть, так как мы имеем здесь дело с системой, имеющей 6 степеней свободы. В соответствии с принятыми обозначениями виртуальных перемещений будет полезно обозначать также через δP виртуальное перемещение произвольной точки P нашей системы, а через δO виртуальное перемещение центра O. Вместе с тем, $\delta \overline{O}$ представляет первую характеристику перемещения, которую мы раньше обозначали через dO.

Если затем, во избежание смешения с действительным элементарным движением, мы обозначим вторую произвольную характеристику через $\overline{\omega'}$, то формула (15) приводит к следующему выражению всякого виртуального перемещения твердого тела:

$$\delta P = \delta O + [\overline{\omega'}\ \overline{OP}]. \tag{16'}$$

17. Если рассматриваемая твердая система не свободна, а имеет неподвижную точку, то последнюю, естественно, принять за центр приведения O; тогда характеристика δO все время равна нулю. Вместе с тем, соотношение (16′), содержащее весь комплекс виртуальных перемещений, приводится к виду:

$$\delta P = [\overline{\omega'}\,\overline{OP}];$$

отсюда ясно, что перемещения твердой системы, имеющей неподвижную точку, характеризуются только тремя произвольными элементами (компонентами вектора $\overline{\omega'}$); и это можно было предвидеть, поскольку мы уже знаем, что такая система имеет три степени свободы.

18. Виртуальные перемещения неголономных систем. Как мы уже знаем, если система подчинена неголономным связям, т. е. связям подвижности, то возможные ее конфигурации в отдельные моменты этим нисколько не ограничены; но общее аналитическое выражение всякой такой связи:

$$\sum_{1}^{n}{}_{h}\, a_h dq_h + b\, dt = 0, \tag{8}$$

обнаруживает, что возможные перемещения системы ограничены. Так, это имеет, например, место для твердого тела, если оно поставлено в такие условия, что должно катиться без скольжения по поверхности другого тела (рубр. 12).

Чтобы понятие о виртуальном перемещении распространить также и на случай, когда имеют место и неголономные связи, следуют критерию, по которому виртуальным является всякое воображаемое перемещение, способное перевести систему из конфигурации C во всякую другую бесконечно близкую конфигурацию C', совместимую с состоянием связей в тот же момент; при этом, однако, такое воображаемое перемещение должно быть подчинено тем же связям подвижности, которые наложены на действительное движение системы.

Приложение этого критерия к случаю, рассмотренному выше (рубр. 12 и 13), совершенно ясно; здесь нужно рассматривать как виртуальное всякое смещение, при котором сохраняется соприкосновение твердого тела с опорной поверхностью, а переход из одного положения в другое, бесконечно близкое, совершается чистым качением; при этом, однако, состояние связей и конфигураций как в исходном, так и в конечном положениях должно соответствовать тому же моменту t; твердое тело, служащее опорой, даже в том случае, когда оно в действительности движется, как мы это считали в рубр. 13 при исчислении виртуальных перемещений, должно считать неподвижным и именно в положении, которое соответствует моменту t.

После всего сказанного легко характеризовать аналитически условие, налагаемое на виртуальные перемещения какой-либо связью подвижности (8). При переходе от одной конфигурации, соответствующей определенным значениям параметров q_h, к другой бесконечно близкой конфигурации, соответствующей в тот же момент значениям $q_h + \delta q_h$, связь подвижности будет:

$$\sum_{1}^{n}{}_{h}\, a_h \delta q_h = 0. \tag{17}$$

Это совершенно очевидно в случае однородной связи ($b = 0$), при которой виртуальные перемещения подчинены тем же ограничениям, что и действительно возможные; так, это имеет место для твердого тела, катящегося по *неподвижной* твердой опоре. Но если связь неоднородна, т. е. если b не обращается тождественно в нуль, то все-таки остается в силе соотношение (17), так как мы должны ее взять для одного и того же момента, начального или конечного в нашем промежутке, а потому в уравнениях (8) нужно положить $dt = 0$.

4. Системы с односторонними связями.

19. Связи положения. Из числа неголономных связей следует отдельно рассмотреть частный тип систем, наиболее простым примером которых является свободная точка, которая может двигаться без ограничений по одну сторону заданной поверхности, но не может проникнуть на другую сторону ее.

Если $\varphi(x, y, z) = 0$ есть уравнение поверхности σ, то две области, на которые она разделяет пространство, характеризуются соответственно неравенствами $\varphi < 0$ и $\varphi > 0$; поэтому изменяя, когда это необходимо, знак функции на обратный, всегда возможно связь, которою ограничено движение нашей точки, выразить аналитически, если подчинить ее координаты условию:

$$\varphi(x, y, z) \leqslant 0.$$

Такая связь называется *односторонней* [1]; то же наименование сохраняется и в том случае, если часть пространства, в которой должна двигаться точка, ограничена несколькими поверхностями; так, например, условия

$$x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0, \quad z \geqslant 0$$

выражают, что точка не должна выходить за пределы положительного октанта координатного триэдра.

Вообще, система, имеющая n степеней свободы,

$$P_i = P_i(q_1, q_2, \ldots, q_n \mid t) \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, N), \tag{2}$$

называется ограниченной *односторонними связями* (связями положения), если соответствующие лагранжевы координаты должны

---

[1] В русской литературе такого рода связи часто называют *неудерживающими*, в отличие от *удерживающих* связей, выражаемых уравнениями вида (4). (*Ред.*)