будет отнесено к какому угодно триэдру, находящемуся в равномерном поступательном движении относительно свода небесного, или, иными словами, относительно любого триэдра, оси которого сохраняют неизменное направление, а начало совершает равномерное прямолинейное движение.

В дальнейшем, всякий раз как мы будем пользоваться уравнением (5), мы будем всегда предполагать, если не будет отчетливо оговорено противное, что движение отнесено к одному из триэдров, о которых мы только что говорили и которые мы будем называть *галилеевыми триэдрами инерции.* Это последнее название было предложено Эйнштейном в его первом мемуаре (1905) о теории относительности и с того времени повсюду принято. Оно представляется не только оправданным, но даже, так сказать, обязательным, поскольку в произведениях Галилея в удивительно ясных и точных выражениях формулирован тот факт, что механические явления следуют тем же законам для двух наблюдателей, находящихся в равномерно поступательном движении друг относительно друга.

Заметим, наконец, что часто при постановке тех или иных проблем механики нам придется говорить *о неподвижных* точках, прямых или плоскостях. Под этим мы всегда будем разуметь точки прямые или плоскости, *неподвижные относительно принятой в механике системы* отсчета; в согласии с тем, что выше изложено, таковой является галилеева система или же, если мы можем удовольствоваться приближением, охарактеризованным в рубр. **18—19**, триэдр, связанный с землей.

9. Математическое выражение физических сил. Позиционные и консервативные силы.

21. На основе уравнения

$$F = ma, \tag{5}$$

объединяющего принципы механики, возникает два типа задач, обратных одна другой: 1) каким-либо образом задано движение материальной точки, а также и известна ее масса; требуется найти силу, которая, действуя на эту материальную точку, была бы способна сообщить ей заданное движение; 2) задана действующая на точку сила, и требуется определить движение точки. В том и другом случае под действующей силой мы разумеем равнодействующую всех приложенных к этой точке сил.

Первая задача разрешается просто и непосредственно: при указанных заданиях она требует только диференцирования. В самом деле, если

$$P = P(t) \tag{6}$$

есть геометрическое уравнение движения, которое по отношению к галилееву триэдру выражается скалярными уравнениями:

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),$$

то, в силу соотношения (5), искомая сила F в функции времени выражается через

$$m\ddot{P},$$

или, в компонентах, через

$$m\ddot{x},\ m\ddot{y},\ m\ddot{z}.$$

Гораздо труднее обыкновенно бывает вторая задача, ее решение, собственно, и составляет основную задачу динамики точки. Чтобы выразить эту задачу при помощи уравнения, нужно, прежде всего, точно установить, в каком смысле и каким способом мы считаем *заданной* силу.

22. Возвратимся снова к силе — весу, или, как мы будем впредь также говорить, к силе тяжести. Мы знаем, что эта сила имеет локальный характер: если мы рассмотрим часть пространства, окружающего землю, например, атмосферу, и представим себе, что мы в состоянии поместить в любую точку этой части пространства тело, которое можно принять за материальную точку, с определенной массой, равной, скажем, единице, то в каждой точке рассматриваемой области к нашей материальной точке будет приложена совершенно определенная сила — ее вес. Обобщая этот случай, мы можем себе представить, что в некоторой области пространства C существуют такие физические условия, что определенная свободная материальная точка P, имеющая, например, массу, равную единице, в каждой точке этой области подвергается действию вполне определенной силы F, которая зависит исключительно от положения этой точки. Мы сможем тогда написать:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(P), \tag{7}$$

или, иначе, обозначая через X, Y, Z — компоненты силы $\boldsymbol{F}$ относительно определенных трех осей, а через x, y, z — координаты взятого положения точки P:

$$X = X(x, y, z), \quad Y = Y(x, y, z), \quad Z = Z(x, y, z).$$

Всякая сила такого рода называется *позиционной*; совершенно естественно рассматривать такого рода силу, как заданную, коль скоро установлен вектор, представляющий собою функцию $\boldsymbol{F}(P)$, выражающую эту силу, отнесенную к единице массы.

Понятие о позиционной силе допускает непосредственное обобщение. Мы к этому придем, если представим себе, что физические условия, которые в некоторой части пространства C определяют силу $\boldsymbol{F}$, действующую на помещенную в определенном ее месте материальную точку, изменяются с течением времени; в этом случае сила $\boldsymbol{F}$, отнесенная к единице массы, будет функцией не только от точки приложения P, но и от времени t, т. е

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(P \mid t), \tag{8}$$

или, в координатах:

$$X = X(x, y, z \mid t),\ Y = Y(x, y, z \mid t),\ Z = Z(x, y, z \mid t).$$

Можно итти и дальше в порядке обобщения; может случиться, что в области C сила $\boldsymbol{F}$ зависит не только от точки приложения и от времени, но и от мгновенной скорости, с которой материальная точка, несущая единицу массы, приходит в рассматриваемый момент в это положение: иначе говоря, может иметь место соотношение:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(P, \dot{P} \mid t), \tag{9}$$

или, в координатах:

$$\left.\begin{aligned} X &= X(x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z} \mid t), \\ Y &= Y(x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z} \mid t), \\ Z &= Z(x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z} \mid t). \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Можно было бы представить себе силы, следующие законам еще более общего характера, например, зависящие от ускорения, а также от последовательных производных (векториальных) от ускорения; так это, например, действительно имеет место в так называемых явлениях последействия. Но в теоретической механике обыкновенно ограничиваются рассмотрением сил типа (9), так как таковыми в подавляющем большинстве случаев являются силы, с которыми нам приходится встречаться в природе.

По аналогии с тем, что мы, согласно приведенному выше определению, понимали под данной позиционной силой в простейшем значении этого слова, мы и здесь будем считать, что сила рассматриваемого общего типа задана, если нам известны функции, составляющие правые части уравнений (9) и (10); совершенно ясно, что позиционные силы (7), а также силы типа (8) входят в состав этой последней категории сил как частные случаи.

23. Движущие силы и сопротивления. Пассивные сопротивления. Установим здесь некоторое различие между силами качественного характера. Если точка находится в движении и $\boldsymbol{F}$ есть сила или одна из сил, производящих это движение, то говорят, что $\boldsymbol{F}$ есть *движущая сила* или *сопротивление* по отношению к рассматриваемому движению в данный момент в зависимости от того, образует ли $\boldsymbol{F}$ в этот момент с направлением движения острый или тупой угол.

Из самого этого определения явствует, что одна и та же позиционная сила может оказаться, в зависимости от обстоятельств, то движущей силой, то сопротивлением. В самом деле, если мы фиксируем определенную точку нашей области, то сила в ней будет одна и та же, с какой бы скоростью через нее ни проходило движущееся тело; достаточно переменить сторону, в которую эта скорость обращена, чтобы движущая сила оказалась сопротивлением, и обратно. Таким образом, в частности, вес тела представляет собой движущую силу, когда тело падает вниз, и сопротивление, когда оно поднимается вверх.

Впрочем, в природе существуют некоторые силы, которые никогда не проявляются в качестве движущих сил. Такие силы получили название *пассивных сопротивлений*. Типичными примерами этого рода сил являются различные сопротивления среды (например воздуха и воды) или трения, вызываемые соприкосновением движущегося тела с другими материальными телами. Они всегда действуют в направлении, противодействующем движению, т. е. в сторону, противоположную скорости точки, если речь идет только о движении материальной точки.

24. Силовые поля. Прежде чем пойти дальше, целесообразно присоединить еще некоторые соображения относительно позиционных сил.

Часть пространства C, в которой определена позиционная сила, называется силовым полем; вместе с тем, под *силой поля* в любой его точке P разумеют ту силу F, которая в этой точке действовала бы на единицу массы и которая поэтому геометрически совпадает с соответствующим ускорением.

Силовое поле является *однородным*, если соответствующая сила во всем поле остается постоянной (по величине и направлению), т. е. не изменяется от точки к точке; так это, например, имеет место, по крайней мере, с весьма большим приближением в случае силы тяжести, если рассматривается настолько малая область земли, что в ней можно пренебречь изменением направления вертикали.

В этом случае вектор, представляющий силу поля, есть хорошо нам известный вектор g; на тело (материальную точку) с массой m действует, как мы знаем, вес mg, представляющий собой произведение силы поля на массу материальной точки. Экспериментально установлено, что в полях, которые действительно имеют место в природе, осуществляется аналогичное обстоятельство, т. е. если F есть сила поля в данном ее пункте (это значит — сила, которая действует на помещенную в ней единицу массы), то сила, которая в том же пункте действует на произвольную массу m, выражается через $m\mu$.

Этот экспериментальный факт обыкновенно выражают так: *весомая* или *гравитационная* масса(т. е. коэфициент, на который нужно умножить силу поля, чтобы получить силу, действующую на рассматриваемое тело) *тождественна с инертной массой*, т. е. определяющей отношение между ускорением и силой (рубр. **16**). В дальнейшем, когда мы будем говорить о силовых полях, мы всегда будем иметь в виду такие, в которых это совпадение гравитационной и инертной массы действительно имеет место.

25. Силовые линии поля. Чтобы получить геометрический образ того, как в данном поле меняется соответствующая сила F, целесообразно пользоваться так называемыми *линиями сил*, или *силовыми линиями поля*.

Возьмем некоторую часть силового поля, притом такую, в которой сила F вовсе не обращается в нуль. Исходя из какой-либо произвольной точки P_0, проведем через нее вектор, представляющий действующую в этой точке силу, и на нем возьмем другую точку P_1, весьма близкую к P_0. На линии действия силы, приложенной в P_1, которая вообще будет отлична от P_0P_1, вновь выберем точку P_2, весьма близкую к P_1, опять в направлении действующей силы. Этот процесс мы будем продолжать, пока он не выведет нас за пределы поля или не возвратит нас в исходную точку P_0.

Этим путем мы получим ломаную линию $P_0P_1P_2P_3\ldots$, сконструированную таким образом, что сила, действующая в каждой из ее вершин, направлена по примыкающей к этой вершине стороне. Если точки $P_0, P_1, P_2, P_3, \ldots$ неограниченно друг к другу приближаются, то в пределе получается линия (обыкновенно кривая) λ, в каждой точке которой действующая сила поля F направлена по касательной к кривой. За сторону, в которую кривая обращена, принимают ту, в которую обращена действующая сила.

Каждая линия λ, построенная таким образом, называется *линией сил*, или *силовой линией поля*. Из самого процесса построения силовых линий ясно, что через каждую точку поля проходит одна, и только одна, силовая линия.

Постараемся выразить силовые линии поля аналитически. Для этого заметим, что они характеризуются тем условием, что элементарное смещение dP вдоль любой из них от какой-либо ее точки должно иметь то же направление и ту же сторону обращения, что и сила поля F в этой точке P; таким образом, силовые линии в каждой части поля, в которой сила не обращается в нуль, определяются совокупностью ∞^2 интегральных кривых системы диференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}.$$

Эта система эквивалентна системе двух уравнений первого порядка с двумя неизвестными функциями, зависящими от одной независимой переменной; так, например, если Z не обращается тождественно в нуль, то эта система имеет вид:

$$\frac{dx}{dz} = \frac{X}{Z}, \quad \frac{dy}{dz} = \frac{Y}{Z}.$$

Здесь z играет роль независимой переменной, x и y суть неизвестные функции; система интегралов $x = x(z)$, $y = y(z)$, определяющая силовые линии, в конечном виде будет содержать две произвольные постоянные, которыми мы можем распорядиться так, чтобы x и y приняли предуказанные значения для произвольно выбранного значения z. Геометрически это значит, что рассматриваемая силовая линия проходит через указанную точку поля. Наличие двух постоянных в так называемых уравнениях силовых линий показывает, что мы имеем здесь дело с системой ∞^2 кривых, одна, и только одна, из которых проходит через любую заданную точку поля (в которой $Z \neq 0$).

Для однородного поля, даже для всякого поля, в котором сила от места к месту сохраняет одно и то же направление, силовыми линиями служат параллельные прямые. Напротив, если сила поля постоянно направлена к неподвижному центру O, то силовыми линиями служат прямые, образующие связку с центром в той же точке O.

26. Консервативные силы. Среди силовых полей по причинам, которые мы лучше выясним в следующем параграфе, наиболее замечательны те, в которых скалярное произведение $\boldsymbol{F}dP$ силы поля $\boldsymbol{F}$ на произвольное элементарное смещение dP точки ее приложения P представляет собой полный диференциал некоторой функции U от P, точнее—от ее координат x, y, z:

$$\boldsymbol{F}dP = dU. \tag{11}$$

Такого рода силовые поля называются *консервативными*; функция $U(x, y, z)$, которую мы будем считать однозначной, конечной, непрерывной и допускающей во всем поле производные, по крайней мере, до второго порядка включительно, называют *потенциалом*, или *силовой функцией* поля [1]).

Заметим здесь, что если некоторая функция U удовлетворяет требованию (11), то ей удовлетворяют и все функции вида $U + c$, где c означает аддитивную произвольную постоянную. В конкретных случаях этой постоянной обыкновенно пользуются для того, чтобы присвоить потенциалу U в заданной точке определенное, заранее предписанное значение, например нуль.

Характеристическое свойство (11) консервативного силового поля совершенно не зависит от системы отсчета; оно остается в силе, как бы мы ни выбрали триэдр, к которому относим силовое поле. Наконец, если напишем уравнение (11) в раскрытой форме:

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = \frac{\partial U}{\partial x}\,dx + \frac{\partial U}{\partial y}\,dy + \frac{\partial U}{\partial z}\,dz, \tag{11'}$$

и заметим, что это тождество должно иметь место для каких угодно значений элементарного смещения dx, dy, dz, то придем к заключению, что

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}. \tag{12}$$

Полезно будет здесь отметить, что это предложение допускает более общее выражение; именно: *производная от силовой функции, взятая в каком угодно направлении, представляет собой не что иное, как компоненту силы поля по этому направлению* [2]). Чтобы оправдать это утверждение, достаточно воспользоваться любым из уравнений (12), например первым: оно именно и выражает, что производная от U по оси x представляет собой компоненту силы поля по этой оси; но, с одной стороны, как мы знаем, соотно-

---

[1]) Некоторые авторы называют функцию U исключительно последним термином (силовой функцией), сохраняя наименование потенциалов для функции $-U$.

[2]) См. приложение IV, „О градиенте скалярной функции и градиентном векторном поле". (*Ред.*)

шения (12) останутся в силе, как бы мы ни выбрали координатные оси, а с другой стороны, за ось x мы можем принять любую прямую. Но то же можно доказать и непосредственно, основываясь на соотношении (11) и на определении ориентированной производной [1]). В самом деле, под производной, взятой в данном направлении, понимают предел отношения наращения функции U при смещении в этом направлении к длине самого смещения (точнее, это есть предел этого отношения, когда смещение стремится к нулю). Если теперь обозначим через $\boldsymbol{n}$ — версор, соответствующий смещению dP, а через ds — бесконечно малую длину такого смещения, то соотношение (11) можно написать в виде:

$$F\boldsymbol{n} \cdot ds = dU;$$

разделяя обе части на ds, мы получаем равенство, которое нам нужно было доказать, ибо отношение двух диференциалов $\frac{dU}{ds}$ как раз представляет собой производную функцию U в направлении $\boldsymbol{n}$, а $F\boldsymbol{n}$ (I, рубр. 20) представляет компоненту силы $\boldsymbol{F}$ по тому же направлению.

Так как уравнения (12) представляют собой непосредственные следствия соотношений (11′) или (11), то консервативное поле может быть определено уравнениями (12); иными словами, под консервативным полем разумеют такое силовое поле, в каждой точке которого составляющие силы поля по координатным осям представляют собой частные производные некоторой функции, положения точки приложения (потенциала).

27. Исключая функцию U из уравнений (12), мы находим три уравнения:

$$\frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}, \quad \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial z}, \quad \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x};$$

они обнаруживают, как это должно быть, собственно, известно из анализа, что существование потенциала (т. е. тот факт, что $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ представляет собой полный диференциал) налагает ограничительные условия на функции X, Y, Z от переменных x, y, z; другими словами, позиционная сила $\boldsymbol{F}$, вообще говоря, неконсервативна.

В качестве примера можно положить:

$$X = -y, \quad Y = x, \quad Z = 0;$$

поле, определяемое этими уравнениями, несомненно, неконсервативно, потому что разность

$$\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = -2$$

не равна нулю, как это должно иметь место всякий раз, когда потенциал существует.

[1]) Читатель найдет это доказательство в упомянутом приложении IV, приведенное в иной концепции. (*Ред.*)

Очень важно заметить, что при определении консервативных сил мы предполагаем как предварительное условие качественного свойства, что функция $U(P)$, удовлетворяющая уравнениям (11), *однозначна*, т. е. в любой точке P она имеет одно единственное значение, где бы эта точка P ни была взята на всем протяжении поля. Однако это ограничение (относящееся к природе функции или, если угодно, к размеру рассматриваемого поля) вполне согласуется с тем, что мы обыкновенно предполагаем относительно функций, рассматриваемых в элементах анализа; и в большинстве случаев этого вполне достаточно для механических приложений; но в некоторых случаях приходится, однако, отказаться от ограничительного предположения однозначности функций на всем протяжении поля (ср., например, случай d) в рубр. 29).

28. В консервативном поле, имеющем потенциал U, поверхности

$$U = \text{const},$$

называются *эквипотенциальными* поверхностями, или *поверхностями уровня*; это суть поверхности, на каждой из которых потенциал имеет во всех ее точках одинаковое значение; еще иначе: каждая эквипотенциальная поверхность может быть рассматриваема как геометрическое место точек, в которых потенциал имеет заданное значение. Через каждую точку x_0, y_0, z_0 поля проходит одна, и только одна, эквипотенциальная поверхность; ее уравнение имеет вид:

$$U(x, y, z) = U(x_0, y_0, z_0).$$

Если точка приложения силы получает элементарное смещение dP по эквипотенциальной поверхности, проходящей через ее первоначальное положение P, то

$$\boldsymbol{F}\, dP = 0,$$

так как потенциал U вдоль эквипотенциальной поверхности сохраняет постоянное значение; но это означает, что сила $\boldsymbol{F}$ перпендикулярна к смещению dP. Так как это справедливо, каково бы ни было элементарное смещение dP по этой эквипотенциальной поверхности, то мы отсюда заключаем, что в любой точке сила нормальна к проходящей через эту точку эквипотенциальной поверхности; иными словами, *в консервативном поле силовыми линиями служат ортогональные траектории эквипотенциальных поверхностей.*

29. **Примеры консервативных полей.** a) Всякое однородное поле является консервативным.

В самом деле, если $\boldsymbol{F}$ есть сила (постоянная по величине, направлению и стороне обращения), то достаточно выбрать ось z, по направлению и стороне обращения совпадающей с $\boldsymbol{F}$, и мы получим:

$$\boldsymbol{F}\, dP = F\, dz,$$

а это есть полный диференциал. Интегрируя, находим, что потенциал до аддитивной постоянной выражается через Fz; следовательно, эквипотенциальными поверхностями служат плоскости, перпендикулярные к постоянному направлению силы. В частности, для силы веса (если за ось z примем вертикаль, обращенную вниз) потенциал, отнесенный к единице массы, выражается через gz (также, конечно, до аддитивной постоянной).

b) Далее, рассмотрим поле, в котором сила имеет постоянное направление, напряжение же ее зависит только от расстояния точки ее приложения от некоторой постоянной плоскости, перпендикулярной к направлению сил. Если эту плоскость примем за координатную плоскость x, y, то компоненты силы по осям x и y будут равны нулю, третья же компонента будет определенной функции $\varphi(z)$ одной только координаты z; мы будем поэтому иметь:

$$\boldsymbol{F}\,dP = \varphi(z)\,dz;$$

интегрируя от начального значения z_0, выбранного совершенно произвольно, найдем, что потенциалом будет служить функция от одной только переменной z:

$$\int_{z_0}^{z} \varphi(z)\,dz$$

(опять-таки, конечно, до произвольной постоянной); эквипотенциальными поверхностями и здесь будут служить плоскости, перпендикулярные к постоянному направлению силы.

c) Рассмотрим, наконец, силовое поле, в котором в каждой точке P сила $\boldsymbol{F}$ направлена к некоторой постоянной точке O, напряжение же ее в каждой точке зависит исключительно от расстояния $\rho = OP$ этой точки от центра O (*центральная сила*). Такого рода сила $\boldsymbol{F}$ в отдельных точках поля может быть обращена от центра O к точке приложения (*сила отталкивания*) или в противоположную сторону (*сила притяжения*). Мы будем обозначать через $\varphi(\rho)$ компоненту силы $\boldsymbol{F}$ по ориентированному направлению OP; иными словами, функция φ сама по себе будет иметь положительное или отрицательное значение в зависимости от того, является ли сила отталкивательной или притягательной. Во всяком случае, скалярное произведение $\boldsymbol{F}dP$ можно выразить, как произведение компонент $\boldsymbol{F}$ и dP по тому же самому ориентированному направлению OP; мы будем, следовательно, иметь

$$\boldsymbol{F}\,dP = \varphi(\rho)\,d\rho.$$

Интегрируя этот полный диференциал от произвольно взятого значения ρ_0, мы получим для потенциала, как всегда с точностью до произвольной постоянной, функцию от одной только переменной:

$$U(\rho) = \int_{\rho_0}^{\rho} \varphi(\rho)\,d\rho.$$

Эквипотенциальные поверхности выражаются в этом случае уравнениями:

$$U(\rho) = \text{const.},$$

или, что то же,

$$\rho = \text{const.}$$

Ясно, что это суть концентрические сферы с общим центром в точке O; силовыми же линиями, как уже было указано в рубр. 25, служат прямые связки, выходящие из того же центра.

d) Дадим еще пример потенциала, не однозначного во всем поле, в котором имеет место соотношение (11); и сначала покажем такой пример в двумерном поле, которым послужит вся плоскость Oxy.

Введем снова полярные координаты ρ и θ (с полюсом O и полярной осью Ox; эти координаты с декартовыми будут, таким образом, связаны уравнениями: $x = \rho \cos\theta$, $y = \rho \sin\theta$). Положим, что сила поля F в произвольной точке P, отличной от начала O, определена следующим образом: по направлению она перпендикулярна к радиусу-вектору OP и обращена в сторону возрастающих аномалий; напряжение же ее выражается через $\frac{k}{\rho}$, где k есть постоянная. Мы исключили начало, поскольку это определение силы в начале координат оказалось бы дефектным (направление неопределенное, напряжение бесконечно большое).

Скалярное произведение FdP мы можем вычислить как произведение из напряженности силы $\frac{k}{\rho}$ на компоненту $\rho d\theta$ смещения по направлению F (II, рубр. 19); мы получим, очевидно, $kd\theta$, так что произведение $k\theta$ может быть рассматриваемо как потенциал поля. Если для аномалии θ_0 в отдельной точке P_0 зафиксируем произвольно одно из ее значений, например, то, которое содержится между нулем и 2π, в качестве значения переменной θ, а следовательно, зафиксируем и $U = k\theta$, то в каждой другой точке P значение потенциала может быть получено непрерывным изменением θ, исходя от значения θ_0; для этого нужно перейти от точки P_0 к точке P по какой-либо непрерывной кривой. Однако при этом, поскольку мы рассматриваем всю плоскость (с изъятием одной только точки O), совершенно ясно, что функция $U = k\theta$ уже не будет однозначной в каждой точке; в самом деле, если будем исходить из точки P с определенным значением θ и обойдем по замкнутой кривой вокруг начала, перемещаясь все время в одну и ту же сторону, то мы вновь придем к точке P со значением функции, увеличенным или уменьшенным на $2\pi k$ при каждом обороте вокруг начала. Но тот же потенциал $U = k\theta$ остается все-таки однозначным в каждой точке поля, если мы принимаем за поле действия силы не всю плоскость, но ограниченную часть ее, из которой исключена точка O и которая имеет такую связность, что в ней невозможно обойти начало (не покидая этой области) [1].

Этот пример легко перенести на трехмерное пространство. Для этого достаточно для каждой точки P с координатами x, y, z взять ее проекцию Q с координатами $0, 0, z$ на ось z и параллель, т. е. окружность, имеющую центр в точке Q и проходящую через P в плоскости, перпендикулярной к оси z. Сила $\boldsymbol{F}$ в точке P определяется, как в предыдущем случае, в плоскости параллели. Во всех точках прямой, параллельной оси z, мы будем иметь, таким образом, один и тот же вектор $\boldsymbol{F}$.

Если вместо декартовых координат x, y, z возьмем так называемые цилиндрические координаты ρ, θ, z, где ρ и θ, как выше, представляют собою не что иное, как полярные координаты относительно x и y, т. е. связаны с декартовыми соотношениями $x = r\cos\theta$ и $y = r\sin\theta$, то мы вновь получим для потенциала выражение $U = k\theta$; эта функция однозначна в ограниченной части поля, но не во всем пространстве, так как она возрастает на $\pm 2k\pi$ после каждого оборота в одну или другую сторону вокруг оси.

10. Диференциальные уравнения движения точки.

30. Выяснив, в каком смысле мы понимаем задание силы, возвратимся ко второй из проблем, перечисленных в рубр. **21.** Чтобы сразу рассмотреть наиболее общий случай, предположим, что сумма $\boldsymbol{F}$ всех сил, действующих на материальную точку P массы m, зависит от положения точки, от ее скорости и, кроме того, от времени. В таком случае движение точки P в силу основного соотношения динамики должно удовлетворять векторному диференциальному уравнению:

$$m\ddot{P} = \boldsymbol{F}(P, \dot{P} \mid t), \tag{13}$$

или же, по отношению к трем неподвижным осям, трем диференциальным уравнениям второго порядка:

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= X(x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z} \mid t),\\ m\ddot{y} &= Y(x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z} \mid t),\\ m\ddot{z} &= Z(x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z} \mid t); \end{aligned}\right\} \tag{13'}$$

Отсюда ясно, что аналитическая проблема определения движения материальной точки, вызываемого данной силой, не отличается от той задачи, которую мы уже рассматривали в кинематике, именно об определении движения точки по данному ее ускорению (II, рубр. 25).

[1] Такой областью, очевидно, мог бы служить первый квадрант; ею не мог бы служить круг с центром в точке O.