чена точка O и которая имеет такую связность, что в ней невозможно обойти начало (не покидая этой области) [1]).

Этот пример легко перенести на трехмерное пространство. Для этого достаточно для каждой точки P с координатами x, y, z взять ее проекцию Q с координатами $0, 0, z$ на ось z и параллель, т. е. окружность, имеющую центр в точке Q и проходящую через P в плоскости, перпендикулярной к оси z. Сила $\boldsymbol{F}$ в точке P определяется, как в предыдущем случае, в плоскости параллели. Во всех точках прямой, параллельной оси z, мы будем иметь, таким образом, один и тот же вектор $\boldsymbol{F}$.

Если вместо декартовых координат x, y, z возьмем так называемые цилиндрические координаты ρ, θ, z, где ρ и θ, как выше, представляют собою не что иное, как полярные координаты относительно x и y, т. е. связаны с декартовыми соотношениями $x = r\cos\theta$ и $y = r\sin\theta$, то мы вновь получим для потенциала выражение $U = k\theta$; эта функция однозначна в ограниченной части поля, но не во всем пространстве, так как она возрастает на $\pm 2k\pi$ после каждого оборота в одну или другую сторону вокруг оси.

10. Диференциальные уравнения движения точки.

30. Выяснив, в каком смысле мы понимаем задание силы, возвратимся ко второй из проблем, перечисленных в рубр. **21**. Чтобы сразу рассмотреть наиболее общий случай, предположим, что сумма $\boldsymbol{F}$ всех сил, действующих на материальную точку P массы m, зависит от положения точки, от ее скорости и, кроме того, от времени. В таком случае движение точки P в силу основного соотношения динамики должно удовлетворять векторному диференциальному уравнению:

$$m\ddot{P} = \boldsymbol{F}(P, \dot{P} \mid t), \tag{13}$$

или же, по отношению к трем неподвижным осям, трем диференциальным уравнениям второго порядка:

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= X(x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z} \mid t), \\ m\ddot{y} &= Y(x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z} \mid t), \\ m\ddot{z} &= Z(x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z} \mid t); \end{aligned}\right\} \tag{13'}$$

Отсюда ясно, что аналитическая проблема определения движения материальной точки, вызываемого данной силой, не отличается от той задачи, которую мы уже рассматривали в кинематике, именно об определении движения точки по данному ее ускорению (II, рубр. 25).

---

[1]) Такой областью, очевидно, мог бы служить первый квадрант; ею не мог бы служить круг с центром в точке O.

Общий интеграл уравнения (13) или (13′) зависит от *шести* произвольных постоянных; данным условиям могут, таким образом, удовлетворять ∞^6 различных движений, каждое из которых будет определено, если мы надлежащим образом зададим еще шесть дополнительных условий. Наиболее подходящими заданиями являются указания положения точки в начальный момент $P_0(x_0, y_0, z_0)$ и ее скорости $\boldsymbol{v}_0(\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$ в тот же момент.

В некоторых случаях возникают упрощения, непосредственно обусловливаемые данными задачами. Например, если данная сила F постоянно параллельна неподвижной плоскости, то достаточно принять плоскость $z=0$ параллельной этой неподвижной плоскости, чтобы компонента Z силы F оказалась тождественно равной нулю; тогда третье из уравнений (13′) принимает простую форму:

$$m\ddot{z}=0;$$

непосредственное интегрирование дает:

$$\dot{z}=\dot{z}_0, \quad z=\dot{z}_0 t+z_0, \tag{14}$$

где z_0 и $\dot{z}_0$ обозначают первые две произвольные постоянные, а именно третью компоненту скорости и третью координату движущейся точки в момент $t=0$. Отсюда также вытекает в силу второго уравнения (14), что всякий раз, как начальная скорость в этих условиях задания параллельна неподвижной плоскости (т. е. когда $\dot{z}_0=0$), движение оказывается плоским.

Во всяком случае, подставив в первые два диференциальных уравнения движения (13′) выражения (14), мы приведем задачу к интегрированию двух диференциальных уравнений с двумя неизвестными функциями $x(t)$ и $y(t)$:

$$m\ddot{x}=X(x, y, \dot{z}_0 t+z_0; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}_0 \mid t),$$
$$m\ddot{y}=Y(x, y, \dot{z}_0 t+z_0; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}_0 \mid t),$$

общий интеграл которых будет содержать еще четыре дополнительных произвольных постоянных.

Аналогично этому, если сила F имеет постоянное направление, то будет целесообразно принять ось x параллельной силе F; компоненты Y и Z обратятся в нуль; второе и третье из уравнений (13) примут вид:

$$m\ddot{y}=0 \quad \text{и} \quad m\ddot{z}=0;$$

интегрируя, мы отсюда получим:

$$\dot{y}=\dot{y}_0, \quad \dot{z}=\dot{z}_0; \quad y=\dot{y}_0 t+y_0, \quad z=\dot{z}_0 t+z_0,$$

где $y_0, z_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$ обозначают четыре произвольные постоянные. Если начальная скорость параллельна постоянному направлению силы, то движение окажется прямолинейным. В общем случае, если в первое из уравнений (13′) подставим полученные таким образом выражения для y и z (а также $\dot{y}$ и $\dot{z}$), то задача сведется к интегрированию одного диференциального уравнения второго порядка:

$$m\ddot{x} = X\,(x,\ \dot{y}_0 t + y_0,\ \dot{z}_0 t + z_0;\ \dot{x},\ \dot{y}_0,\ \dot{z}_0 \,|\, t),$$

общий интеграл которого будет содержать еще две произвольные постоянные.

31. В заключение заметим еще, что иногда бывает целесообразным проектировать основное уравнение (13) не на неподвижные декартовы оси, а на ребра главного триэдра (подвижного) траектории; как было указано в рубр. 76 гл. I, эти три ребра определяются версорами $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$ (касательная, главная нормаль, бинормаль). Принимая во внимание известные выражения для компонент касательного и центростремительного ускорений (II, рубр. 27), получим, таким образом, так называемые внутренние уравнения движения:

$$m\ddot{s} = F_t, \quad m\frac{v^2}{r} = F_n, \quad 0 = F_b; \tag{15}$$

здесь, как обычно, s есть дуга траектории, r — радиус кривизны, v — напряженность скорости, а F_t, F_n, F_b обозначают компоненты силы по ориентированным направлениям соответственно $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$.