ГЛАВА VIII.

Вторичные или производные понятия механики.

1. Понятия о силе и массе и кинематические характеристики движения приводят к другим понятиям механики, которые называются *вторичными*, или *производными*; каждое из них выражает ту или иную особенность или же то или иное физическое проявление динамического процесса. Мы здесь дадим определения этих понятий и изучим взаимные отношения их.

1. Работа.

2. **Работа постоянных сил.** В повседневной речи мы обыкновенно говорим, что человек *работает*, когда он совершает мускульное усилие, чтобы произвести то или иное перемещение материальных предметов; таким образом, даже в разговорной речи мы связываем понятие о работе с *силой* и *перемещением*. Имея в виду дать этому понятию точное механическое определение, мы начнем с того случая, когда материальная точка находится под действием *постоянной* силы. Если точка приложения постоянной силы F получает перемещение $\overline{P_1P_2}$, то *работой силы F на этом смещении* называют скалярное произведение двух векторов — силы и смещения.

Таким образом, если обозначим работу через L, то

$$L = F\overline{P_1P_2}; \tag{1}$$

вследствие известного свойства скалярного произведения (I, рубр. 20) можно сказать, что *работа выражается произведением из величины силы на компоненту смещения по направлению силы*, или, наоборот, *произведением из величины смещения на компоненту силы по направлению смещения*.

Работа силы L называется *моторной* или *работой двигателя*, если она имеет положительное значение, и *работой сопротивления*, если она имеет отрицательное значение; первый случай имеет место, когда сила образует со смещением острый угол, второй, — когда этот угол тупой.

Далее, если смещение перпендикулярно к силе, то работа равна нулю; и обратно, *если сила отлична от нуля, а работа ее* *при данном смещении (тоже отличном от нуля) равна нулю, то смещение перпендикулярно к действующей силе.*

Если X, Y, Z суть компоненты силы $\boldsymbol{F}$ по осям координатного триэдра, а Δx, Δy, Δz суть компоненты смещения, то работа выражается формулой:

$$L = X\Delta x + Y\Delta y + Z\Delta z;$$

в частности, для бесконечно малого смещения dP получаем *бесконечно малую* работу или *элемент работы*:

$$dL = \boldsymbol{F}\,dP = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz.$$

При постоянной силе, вследствие основных свойств скалярного произведения, всегда имеют место тождества:

$$(-\boldsymbol{F})\,\overline{P_1P_2} = -(\boldsymbol{F}\overline{P_1P_2}),$$

$$\boldsymbol{F}\overline{P_2P_1} = -(\boldsymbol{F}\overline{P_1P_2}),$$

$$(\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2)\,\overline{P_1P_2} = \boldsymbol{F}_1\overline{P_1P_2} + \boldsymbol{F}_2\overline{P_1P_2},$$

$$\boldsymbol{F}\overline{P_1P_2} + \boldsymbol{F}\overline{P_2P_3} + \ldots + \boldsymbol{F}\overline{P_{n-1}P_n} = \boldsymbol{F}\overline{P_1P_n};$$

они выражают следующее:

a) *Если сила или смещение меняет свой знак* (т. е. меняет сторону обращения на противоположную), *то работа также меняет знак* (сохраняя без изменения абсолютное значение).

b) *Работа равнодействующей нескольких сил, приложенных к одной и той же точке на данном смещении последней, равна сумме (алгебраической) работ отдельных сил на том же смещении.*

c) *Сумма (алгебраическая) работ силы, соответствующих нескольким последовательным перемещениям, равна работе, которая была бы произведена на результирующем смещении* (т. е. представляющем собой векторную сумму данных смещений).

3. Работа переменной силы. Пусть теперь $\boldsymbol{F}$ будет сила, произвольным образом меняющаяся с течением времени. Чтобы рассмотреть наиболее общий случай, предположим, что сила $\boldsymbol{F}$ зависит от времени, от положения точки ее приложения P и от скорости последней $\dot{P}$. Положим также, что для этой точки P установлено некоторое движение

$$P = P(t), \text{ или } x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t); \tag{2}$$

мы будем здесь даже предполагать, что это движение совершенно не зависит от того, которое произвела бы сила $\boldsymbol{F}$, если бы точка P была свободна и двигалась бы только под действием этой силы. Это значит, что движение, выражаемое уравнениями (2), может быть произведено совокупностью сил, в состав которой входит и сила $\boldsymbol{F}$; определяется, однако, только работа, произведенная именно силой $\boldsymbol{F}$. В этих условиях сила $\boldsymbol{F}$ при заданных уравнениях (2) может быть определена в функции одного только времени; поэтому в течение элемента времени dt, содержащегося между двумя произвольными моментами t и $t+dt$, силу $\boldsymbol{F}$ можно рассматривать (до бесконечно-малых порядка dt) как постоянную, равную одному из значений, которое она имеет в этом элементарном интервале от t до $t+dt$. Поэтому за *элемент работы* переменной силы $\boldsymbol{F}$, соответствующей бесконечно малому смещению от $P(t)$ до $P(t+dt)$, принимается бесконечно малое скалярное произведение

$$dL = \boldsymbol{F}\,dP.$$

Если через $\boldsymbol{v}$ обозначим скорость движения (2) и примем во внимание выражение элементарного смещения $dP = \boldsymbol{v}\,dt$, то определенному таким образом элементу работы можно придать вид:

$$dL = \boldsymbol{F}\boldsymbol{v}\,dt = (X\dot{x} + Y\dot{y} + Z\dot{z})\,dt; \tag{3}$$

при этом предполагается, что X, Y, Z выражены на основе уравнений (2) и их производных в функции одной только переменной t — времени.

В соответствии с этим *под работой силы* $\boldsymbol{F}$ при движении (2) точки ее приложения в промежутке между произвольными моментами t_1 и t_2 или между положениями точки $P(t_1)$ и $P(t_2)$ разумеют сумму всех элементарных работ (3) на пути последовательных перемещений точки P при переходе из первого положения во второе; это значит, полагаем:

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}\boldsymbol{v}\,dt = \int_{t_1}^{t_2} (X\dot{x} + Y\dot{y} + Z\dot{z})\,dt, \tag{4}$$

где в правой части мы имеем дело с обыкновенным определенным интегралом.

Основываясь на элементарном свойстве определенного интеграла, мы непосредственно приходим к обобщению на случай переменной силы теоремы c), установленной в рубр. 2 для работы постоянных сил, именно: *работа силы, произведенная на двух последовательных путях точки ее приложения, равна сумме работ, произведенных на каждом из этих путей.*

4. Предыдущее определение работы, как интеграла элементарных работ, приобретает более конкретный смысл, если, восходя к возникновению понятия об интеграле, мы представим себе L как предел надлежащим образом составленной суммы.

Обозначим через c дугу траектории, описанную точкой приложения P силы $\boldsymbol{F}$ от момента t_1 до момента t_2, и представим себе вписанной в нее произвольную ломаную линию; каждой стороне этой ломаной ΔP отнесем одно из тех значений силы $\boldsymbol{F}$, которые она имеет на соответствующей дуге (например, значение в начальной точке отрезка при движении точки P в момент, когда она через это положение проходит); рассмотрим сумму

$$\sum \boldsymbol{F}\,dP \tag{5}$$

работ этих сил, предполагая таковые постоянными на протяжении каждого смещения dP. Если через $\boldsymbol{v}$ обозначим скорость точки P в начальной точке отрезка ΔP, то

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta t} = \boldsymbol{v};$$

поэтому

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} = \boldsymbol{v} + \bar{\varepsilon},$$

т. е.

$$\Delta P = \boldsymbol{v}\, dt + \bar{\varepsilon}\, dt,$$

где $\bar{\varepsilon}$ есть бесконечно малая одновременно с dt. Таким образом сумму (5) можно представить в виде:

$$\sum \boldsymbol{F}\boldsymbol{v}\, dt + \sum \boldsymbol{F}\bar{\varepsilon}\, dt. \tag{5'}$$

Если все стороны нашей ломаной стремятся к нулю, то второе слагаемое предыдущей суммы стремится к нулю, как это известно из анализа; первое же стремится к интегралу

$$\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}\boldsymbol{v}\, dt,$$

т. е. к работе L; мы отсюда заключаем, что

$$L = \lim \sum \boldsymbol{F}\, dP.$$

Таким образом теоретически оправдано определение работы, выражаемое равенством:

$$L = \int_c \boldsymbol{F}\, dP = \int_c X\, dx + Y\, dy + Z\, dz;$$

формально это равенство может быть выведено из равенства (4), если в нем заменить $\boldsymbol{v}\, dt$ через dP, т. е. подставить dx, dy, dz вместо $\dot{x}\, dt$, $\dot{y}\, dt$, $\dot{z}\, dt$.

5. Работа позиционных сил. В этом случае для вычисления работы нет необходимости знать, как мы это предполагали выше в общем случае, уравнения движения точки приложения P; достаточно знать только траекторию. В самом деле, пусть

$$P = P(s), \text{ или } x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s) \tag{6}$$

будут параметрические уравнения этой траектории, в которых мы под s разумеем длину дуги, отсчитываемую от произвольно выбранного начала. Когда материальная точка P описывает эту кривую под действием данной позиционной силы $\boldsymbol{F}(P)$, то последняя определяется в функции от одной только переменной s. С другой стороны, элементарное смещение

$$dP = \frac{dP}{ds}\,ds$$

есть не что иное, как произведение из ds на версор $\frac{dP}{ds} = \boldsymbol{t}$, касательный к траектории; этот версор также представляет собой функцию одной только переменной s. Элемент работы в этом случае можно выразить в виде:

$$dL = \boldsymbol{F}\boldsymbol{t}\,ds = \left(X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds}\right)ds;$$

если через F_t обозначим компоненту силы по касательной к траектории в сторону возрастающих s, то

$$dL = F_t\,ds;$$

а так как F_t зависит исключительно от s, то работа, выполненная силой $\boldsymbol{F}$ при движении точки по кривой между точками $P_1(t)$ и $P_2(t)$, выражается обыкновенным определенным интегралом:

$$L = \int_{s_1}^{s_2} F_t ds = \int_{s_1}^{s_2}\left(X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds}\right)ds,$$

совершенно независимо от того, по какому закону происходит движение за этот промежуток времени.

Отсюда следует (рубр. 2,*a*), *что работа позиционной силы меняет знак, коль скоро меняется сторона обращения пути точки* ее приложения; иначе говоря, работа позиционной силы, выполненная на некотором пути, отличается только знаком от работы, выполняемой силой в том же поле при обратном движении по тому же пути.

Это существенно отличает рассматриваемый случай от того, что имеет место, когда сила зависит непосредственно от времени или от скорости; в этом последнем случае, помимо пути, существенную роль играет также закон, по которому точка совершает свое движение с течением времени; и даже если этот закон нам дан для прямого движения (т. е. от P_1 до P_2), то все же остается неопределенным закон обратного движения.

6. Работа консервативных сил. Для этого частного типа позиционных сил имеет место чрезвычайно замечательное обстоятельство, именно: для вычисления работы в этом случае не только нет надобности знать закон движения, но нет даже нужды знать его траекторию; достаточно указать только крайние точки пути P_1 и P_2. В самом деле, в силу характеристического тождества, которым определяются консервативные силы

$$\boldsymbol{F}\,dP = dU,$$

где $U(x, y, z)$ представляет собой потенциал; элемент работы выражается в этом случае через

$$dL = dU.$$

Интегрируя это выражение, мы поэтому получаем для работы $L_{P_1P_2}$, произведенной силой на каком угодно пути точки ее приложения между P_1 и P_2, значение

$$L_{P_1P_2} = U(x_2, y_2, z_2) - U(x_1, y_1, z_1), \tag{7}$$

где x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2 означают координаты точек P_1 и P_2. Мы приходим, таким образом, к следующему выводу: *каков бы ни был путь, описанный точкой приложения консервативной силы в поле ее действия, выполненная ею работа равна разности потенциалов в конечной и исходной точках этого пути.*

Пользуясь аддитивной произвольной постоянной, входящей в состав силовой функции, мы можем всегда достигнуть того, чтобы в определенной точке поля P_0 потенциал обращался в нуль; если теперь обозначим через $P(x, y, z)$ произвольную точку поля, то соотношение (7) дает:

$$L_{P_0P} = U(x, y, z).$$

Таким образом потенциал в точке P можно определить как работу, выполненную силой поля, когда ее точка приложения перемещается из постоянного начального положения P_0 в положение P, по какому бы пути это перемещение ни происходило. Благодаря этому становится физически ясным, что потенциал не зависит от системы отсчета, хотя формальное его определение и было поставлено в связь с компонентами силы по осям координат; мы это уже указывали при определении консервативных сил (VII, рубр. 26).

7. Свойство, установленное в предыдущей рубрике, характерно для консервативных сил в том смысле, что им консервативные силы определяются; это значит, если сила $\boldsymbol{F}$ обладает тем свойством, что работа, совершенная при продвижении точки ее приложения между двумя положениями P_1 и P_2 в некоторой части пространства C, зависит только от этих конечных точек P_1 и P_2, а не от траектории, то $\boldsymbol{F}$ есть консервативная сила. В самом деле, если мы выберем произвольно постоянную точку P_0, то работа силы $\boldsymbol{F}$ при перемещении от P_0 к любой другой точке $P(x, y, z)$ области C, в силу сделанного предположения, представляет собою однозначную функцию от x, y, z:

$$L_{P_0P} = U(x, y, z); \tag{8}$$

и легко доказать, что сила $\boldsymbol{F}$ образуется наличием потенциала U. С этой целью заметим, что при любом элементарном смещении dP, приводящем материальную точку из P в $P_1 = P + dP$, соответствующий элемент работы

$$L_{PP_1} = \boldsymbol{F}\, dP$$

можно вычислить, в силу предположенной независимости работы от пути, используя это свойство силы. В самом деле, представим себе, что точка приложения проходит сначала от P к P_0, а потом от P_0 к P_1. Мы будем, таким образом, иметь:

$$\boldsymbol{F}dP = L_{PP_0} + L_{P_0P_1},$$

или также

$$\boldsymbol{F}dP = L_{P_0P_1} - L_{P_0P},$$

т. е. в силу соотношения (8):

$$\boldsymbol{F}dP = U(x+dx,\ y+dy,\ z+dz) - U\ (x,\ y,\ z);$$

отсюда следует, что по крайней мере до бесконечно малых высших порядков

$$\boldsymbol{F}dP = dU;$$

мы отсюда, таким образом, заключаем, что $\boldsymbol{F}$ действительно есть консервативная сила, допускающая потенциал [1]).

8. Отметим, наконец, что из соотношения (7) рубр. 6, в частности, вытекает, что работа, произведенная консервативной силой, равна нулю, если точка ее приложения возвращается в исходное положение, совершив замкнутый путь. В этом находит себе оправдание присвоенное силам, допускающим потенциал, наименование *консервативных* сил. В соответствующих силовых полях работа не приобретается и не теряется, когда точка приложения силы проходит замкнутый контур. Если будем рассматривать работу силы, как вид физической энергии, выделяемой или приобретаемой точкой приложения силы, то мы констатируем, что энергия эта равна нулю при обходе произвольного замкнутого контура; в этом смысле имеет место сохранение энергии.

2. Работа и кинетическая энергия.

9. Возвращаясь теперь к произвольной силе $\boldsymbol{F}$, представим себе, что она приложена к некоторой материальной точке P массы m, и рассмотрим работу, выполненную силой $\boldsymbol{F}$ в течение элемента времени. В силу основного уравнения динамики:

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a},$$

элемент работы, выполненной силой $\boldsymbol{F}$, при смещении $dP = \boldsymbol{v}\,dt$, которому подвергается точка P в рассматриваемый элемент времени dt, можно представить в виде:

$$dL = (m\boldsymbol{a})\,(\boldsymbol{v}\,dt).$$

Но ускорение $\boldsymbol{a}$ точки представляет собой не что иное, как производную скорости $\boldsymbol{v}$; поэтому:

$$(m\boldsymbol{a})\ \boldsymbol{v} = (m\boldsymbol{v})\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{1}{2}(m\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}).$$

---

[1]) Некоторое пояснение к устанавливаемому здесь предложению читатель найдет в приложении IV о градиенте данной функции и о градиентном векторе.