можно вычислить, в силу предположенной независимости работы от пути, используя это свойство силы. В самом деле, представим себе, что точка приложения проходит сначала от P к P_0, а потом от P_0 к P_1. Мы будем, таким образом, иметь:

$$F\,dP = L_{PP_0} + L_{P_0P_1},$$

или также

$$F\,dP = L_{P_0P_1} - L_{P_0P},$$

т. е. в силу соотношения (8):

$$F\,dP = U(x+dx,\ y+dy,\ z+dz) - U\ (x,\ y,\ z);$$

отсюда следует, что по крайней мере до бесконечно малых высших порядков

$$F\,dP = dU;$$

мы отсюда, таким образом, заключаем, что F действительно есть консервативная сила, допускающая потенциал [1]).

8. Отметим, наконец, что из соотношения (7) рубр. 6, в частности, вытекает, что работа, произведенная консервативной силой, равна нулю, если точка ее приложения возвращается в исходное положение, совершив замкнутый путь. В этом находит себе оправдание присвоенное силам, допускающим потенциал, наименование *консервативных* сил. В соответствующих силовых полях работа не приобретается и не теряется, когда точка приложения силы проходит замкнутый контур. Если будем рассматривать работу силы, как вид физической энергии, выделяемой или приобретаемой точкой приложения силы, то мы констатируем, что энергия эта равна нулю при обходе произвольного замкнутого контура; в этом смысле имеет место сохранение энергии.

2. Работа и кинетическая энергия.

9. Возвращаясь теперь к произвольной силе F, представим себе, что она приложена к некоторой материальной точке P массы m, и рассмотрим работу, выполненную силой F в течение элемента времени. В силу основного уравнения динамики:

$$F = ma,$$

элемент работы, выполненной силой F, при смещении $dP = v\,dt$, которому подвергается точка P в рассматриваемый элемент времени dt, можно представить в виде:

$$dL = (ma)\,(v\,dt).$$

Но ускорение a точки представляет собой не что иное, как производную скорости v; поэтому:

$$(ma)\ v = (mv)\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{1}{2}(mvv).$$

[1]) Некоторое пояснение к устанавливаемому здесь предложению читатель найдет в приложении IV о градиенте данной функции и о градиентном векторе.

Если мы поэтому положим:

$$T = \frac{1}{2}(mv)\,v = \frac{1}{2}\,mv^2 = \frac{1}{2}\,mv^2\,, \tag{9}$$

то оказывается, что работа силы F на пути элементарного смещения материальной свободной точки выражается через

$$dL = dT\,. \tag{10}$$

На этом важном результате необходимо остановиться и, прежде всего, нужно выяснить значение скалярной величины $\frac{mv^2}{2}$, которую мы обозначили через T.

Это *полупроизведение из массы материальной точки на квадрат ее скорости (скалярной) в определенный момент* называется *живой силой* или *кинетической энергией* (т. е. энергией движения) точки в рассматриваемый момент. Прежде всего, постараемся выяснить наглядным путем смысл этого названия. Каждый из нас ясно себе представляет, что материальные тела, обладающие определенной скоростью, приобретают способность производить работу, которою они не обладают в состоянии покоя. Так, например, молот, опускаемый рукой с определенной скоростью, сообщает столу, скажем, горизонтальному, удар, которого бы стол не испытал, если бы мы опустили на него молот, который к моменту касания со столом уже утратил бы всякую скорость; точно так же воздух в состоянии покоя не проявляет никакого динамического эффекта; между тем, поток воздуха способен вращать колеса ветряной мельницы, производя при этом работу в экономическом значении слова; снаряды производят свои ужасные действия только в том случае, если обладают большой скоростью, и т. д.

Итак, наиболее обычные повседневные опыты показывают, что этого рода энергия, которую материальные тела приобретают в зависимости от состояния своего движения, проявляется в виде эффекта, тем более значительного, чем больше, с одной стороны, абсолютное значение их скорости, а с другой стороны — при равных скоростях, — чем больше их масса; это приводит к заключению, что данное полупроизведению (9) название кинетической энергии вполне согласуется с нашими физическими представлениями [1]).

[1]) Второе название живой силы представляется на первый взгляд менее удачным в том отношении, что кинетическая энергия хотя и зависит от силы, но сама по себе таковой не представляет. Но это наименование имеет исторические причины. Лейбниц противополагал *мертвую силу*, или, как мы бы сказали, статическую силу (как давление тяжелого тела, лежащего на плоскости опоры), *живой силе* или силе движения. Ученики Лейбница именно и вычисляли силу, действующую на движущуюся точку при помощи кинетической энергии, которую она сообщала материальной точке и которая проявляется, когда мы заставляем действовать различные постоянные силы на точку, движущуюся по данному пути. В самом деле, возьмем постоянную силу F, которая, будучи приложена к свободной материальной точке массы m, нахо-

При этих соглашениях уравнение (10) выражает следующую теорему (живой силы): *во время движения, обусловливаемого силой, действующей на свободную материальную точку, элемент работы силы в каждый бесконечно малый промежуток времени равен (по величине и по знаку) приращению, которое в этот элемент времени приобрела кинетическая энергия точки.*

В более наглядной форме можно сказать, что всякий раз, как сила F *производит* работу, настолько же возрастает кинетическая энергия точки; всякий же раз, как сила F *поглощает* работу, кинетическая энергия настолько же уменьшается.

Рассмотрим теперь работу L, выполненную силой F в промежуток времени от определенного момента t_0 до переменного момента t; с этой целью интегрируем равенство (10) в пределах от t_0 до t; мы получим:

$$L = T - T_0, \tag{11}$$

где T_0 обозначает кинетическую энергию точки в момент t_0, т. е.: *изменение, которое в любой промежуток времени испытывает кинетическая энергия свободной точки, движущейся под действием некоторой силы, равно работе, выполненной этой силой за этот промежуток времени.*

10. Если, как в предыдущем параграфе, будем обозначать через L работу, которую выполнила сила, вызывающая движение материальной точки, и будем смотреть на нее, как на *энергию*, сообщенную материальной точке внешними обстоятельствами, которыми обусловливается движение, то $-L$ выразит *энергию, выделенную материальной точкой во-вне.* Так как равенство (11) можно написать в виде:

$$T - L = \text{const}, \tag{11'}$$

то мы можем сказать, что законы механики устанавливают для движения материальной точки под действием силы консервативный характер состояния ее энергии в том смысле, что происхо-

---

дящейся первоначально в покое, сообщает ей равномерно-ускоренное прямолинейное движение (II, рубр. 22); между силой F, ускорением a, скоростью v (в скалярном значении этих терминов) и пройденным расстоянием s имеют место скалярные соотношения:

$$F = ma, \qquad s = \frac{1}{2}at^2, \qquad v = at,$$

а потому

$$Fs = \frac{1}{2}ma^2t^2 = \frac{1}{2}mv^2;$$

если поэтому сравним две постоянные силы, действующие на том же пути s движущейся точки, то будем иметь:

$$F_1 s = \frac{1}{2}mv_1^2, \qquad F_2 s = \frac{1}{2}mv_2^2,$$

и, следовательно,

$$F_1 : F_2 = \frac{1}{2}mv_1^2 : \frac{1}{2}mv_2^2.$$

дит компенсация энергии T, которой движущаяся точка обладает в каждый момент в кинетической форме, энергией $-L$, которую она, начиная от произвольного момента t_0, выделяет наружу в виде работы: сумма той и другой энергии (*полная энергия*) остается постоянной.

11. Этот вывод принимает особенно выразительный характер в случае консервативных сил. Энергия $-L$ представляет собой не что иное, как потенциал U с обратным знаком (по крайней мере до аддитивной постоянной, не имеющей существенного значения). Если поэтому обозначим через E постоянную, то уравнение (11′) дает:

$$T - U = E; \tag{11''}$$

это — чрезвычайно важное соотношение между двумя элементами T и U (т. е., по существу, между скоростью и положением движущейся точки), имеющее место во все время движения.

Количество $-U$ по своему значению и по тому обстоятельству, что оно зависит только от положения движущейся точки, называется *энергией положения* или также *потенциальной энергией*. Соотношение (11″), которое обыкновенно называют *уравнением* или *интегралом живой силы*, выражает поэтому принцип сохранения энергии в самом узком его значении, поскольку здесь речь идет только об одной изолированной материальной точке и ее механической энергии.

Всякое состояние движения точки (характеризуемое ее скоростью и положением) можно рассматривать как одаренное двумя формами энергии — кинетической и потенциальной. Самое движение в этом свете представляется как явление преобразования кинетической энергии в потенциальную, и обратно; но общее количество E энергии постоянно остается неизменным, поскольку энергия данной точки не поглощается извне и не выделяется во-вне. Таким образом название *полной энергии* материальной точки, которое обыкновенно присваивается постоянной E, представляется вполне оправданным. Ее называют также *постоянной живой силы*, как говорили механики старого времени, когда вся физика еще не была проникнута общей идеей об *энергии*.

3. Мощность.

12. Совершенно ясно, в особенности с точки зрения технических приложений, что работа играет большую роль не только сама по себе, но и в ее отношении ко времени, которое потребовалось для ее выполнения; в связи с этим вводится понятие о *мощности*. Если сила $\boldsymbol{F}$ какой угодно природы приложена к материальной точке, то при любом ее смещении за произвольный промежуток времени от t до $t+\Delta t$ отношение выполненной за этот промежуток работы к продолжительности промежутка называют *средней мощностью силы*; таким образом средняя