мощность силы F за промежуток от t до $t+\Delta t$ выражается формулой:

$$\frac{\int\limits_{t}^{t+\Delta t} \boldsymbol{F}\, dP}{\Delta t};$$

в связи с этим *мощностью силы в момент* t называется предел, к которому стремится эта средняя мощность, когда Δt стремится к нулю, т. е. отношение элемента работы к соответствующему элементу времени:

$$\boldsymbol{F}\frac{dP}{dt} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{v} = X\dot{x} + Y\dot{y} + Z\dot{z}.$$

Отсюда следует, что вычисление мощности во всех без исключения случаях (даже при позиционных силах, когда работа не зависит от закона движения во времени) требует знания скорости материальной точки.

4. Импульс силы и количество движения. Удары.

13. Импульс. Положим опять, что точка приложения переменной силы $\boldsymbol{F}$ совершает некоторое движение; под *импульсом* силы от момента t_0 до t разумеют интеграл:

$$\boldsymbol{I} = \int\limits_{t_0}^{t} \boldsymbol{F}\, dt,$$

т. е. вектор, компонентами которого служат:

$$I_x = \int\limits_{t_0}^{t} X\, dt, \quad I_y = \int\limits_{t_0}^{t} Y\, dt, \quad I_z = \int\limits_{t_0}^{t} Z\, dt.$$

Что касается действительного вычисления векторного интеграла $\boldsymbol{I}$ или, что то же, трех его компонентов I_x, I_y, I_z, то мы можем повторить соображения, аналогичные тем, которые нашли себе место в рубр. 3; именно, когда задано движение точки приложения силы, вышеуказанные определенные интегралы сводятся к обыкновенным интегралам относительно переменной t. Но ясно, что в отличие от того случая, когда мы вычисляем работу, импульс $\boldsymbol{I}$ даже и при позиционных или консервативных силах зависит не только от геометрической природы траектории материальной точки, но и от закона, по которому описывающая ее точка зависит от времени.

Во всяком случае, если сохраним постоянным момент t_0 и будем менять t, то импульс $\boldsymbol{I}$ представляет собой функцию (векторную), которая обращается в нуль при $t = t_0$ и которая имеет производной вектор силы:

$$\frac{d\boldsymbol{I}}{dt} = \boldsymbol{F};$$

иными словами, *производная импульса по времени равна силе.*

14. Количество движения и импульс силы, его вызывающий. Пусть F будет сила, производящая движение свободной материальной точки массы m; рассмотрим импульс силы F за промежуток времени от t_0 до t_1 при движении, сообщенном этой силой материальной точке. В силу основного уравнения динамики:

$$I = \int_{t}^{} F\,dt = \int_{t_0}^{t_1} ma\,dt = m\int_{t_0}^{t_1} \frac{dv}{dt}\,dt,$$

т. е.

$$I = \Delta\,(mv), \tag{12}$$

где $\Delta(mv)$ означает наращение векториальной величины mv за промежуток от момента t_0 до момента t_1.

Этот вектор mv называется *количеством движения* материальной точки массы m, имеющей скорость v; соотношение (12) можно выразить в словах следующим образом: *если F есть полная сила, действующая на материальную точку, то импульс силы за данный промежуток времени равен изменению количества движения материальной точки за тот же промежуток* [1]).

15. Удары. До сих пор при изучении движения материальной точки мы всегда предполагали, что это явление в рассматриваемые промежутки времени протекает непрерывно (ср. предположение, принятое раз навсегда в рубр. 4 гл. II). Но все же иногда может случиться, что материальная точка в некоторый момент внезапно изменяет свою скорость, не изменяя при этом значительно своего положения. Это имеет место, когда на точку оказывают действие особого рода силы, о которых мы до сих пор еще не упоминали и которые принято называть *ударами*. К такого рода силам нас приводят, например, наблюдения удара молота по наковальне, удара кия в бильярдный шар, удара ядра в стену и т. д. Заметим, прежде всего, что сила F за все время, в течение которого мы ее при таких обстоятельствах наблюдаем, сохраняет напряженность конечную, т. е. меньшую некоторого наперед указанного числа; поэтому соответствующий импульс за промежуток времени от t_0 до t_1

$$I = \int_{t_0}^{t_1} F\,dt$$

[1]) Школа Декарта в противоположность лейбницевой утверждала, что силы надлежит измерять не по живой силе, а по количеству движения. Декартова точка зрения правильна, если рассматривать постоянные силы, действующие в один и тот же промежуток времени (а не на том же пути, как это необходимо для оправдания вычислений Лейбница). В самом деле, если возвратимся к обозначениям подстрочного примечания на стр. 338, то для постоянной силы F_1 имеем:

$$F_1 t = mat = mv,$$

а следовательно, для двух сил F_1 и F_2, *действующих в течение того же промежутка времени* t, действительно имеет место соотношение:

$$F_1 : F_2 = m_1 v_1 : m_2 v_2.$$

стремится к нулю, когда t_1 стремится к t_0; это можно выразить так, что *мгновенный импульс* $F\,dt$, к которому в этом случае сводится интеграл I, исчезает (как произведение из вектора конечной величины F на бесконечно малый скаляр dt). Но, если мы, наоборот, представим, что сила F, действуя в чрезвычайно короткий промежуток времени τ, содержащийся между моментами t_0 и t_1, принимает за этот промежуток весьма большое напряжение, то может случиться, что импульс силы за этот ничтожный промежуток времени примет определенное конечное значение. Чтобы дать математическое выражение этому физическому положению вещей, по крайней мере на типичном примере, представим себе силу, которая в данный промежуток времени от t_0 до t_1 имеет постоянное значение:

$$F = \frac{I_0}{\tau}, \tag{13}$$

где I_0 означает постоянный вектор, а τ—продолжительность $t_1 - t_0$ рассматриваемого промежутка времени. Ускорение, которое будет иметь свободная материальная точка массы m, подверженная действию этой силы, выразится через

$$\frac{dv}{dt} = \frac{I_0}{m\tau}.$$

Интегрируя это равенство от момента t_0 до произвольного момента t рассматриваемого промежутка времени и обозначая через v_0 скорость в момент t_0, мы получим:

$$v = v_0 + \frac{t - t_0}{m\tau} I_0.$$

Так как $\frac{(t-t_0)}{\tau}$ есть правильная дробь, то скорость по абсолютному значению остается меньше, нежели $\frac{v_0 + I_0}{m}$; в момент же t_1

$$v_1 = v_0 + \frac{I_0}{m}, \tag{14}$$

т. е. имеет как раз указанное выше значение, не зависящее от промежутка τ. С другой стороны, вычисляя импульс I силы (13) за промежуток от момента t_0 до момента t_1, найдем, ввиду того что $t_1 - t_0 = \tau$:

$$I = I_0.$$

Вследствие этого, когда τ стремится к нулю, сила (13) по абсолютному значению становится бесконечно большой; но импульс ее, даже отнесенный к первому элементу времени dt, следующему за моментом t_0, сохраняет конечное значение I_0. Таким образом скорость, приобретенная точкой за этот элемент времени, все-таки выражается формулой (14), хотя смещение ее бесконечно мало; это становится ясным, если в общем выражении этого смещения

$$\Delta P = \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{v}\, dt$$

будем приближать t_1 к t, помня при этом, что $\boldsymbol{v}$ сохраняет конечное значение. Таким образом в пределе, когда τ стремится к нулю, мы имеем математическое выражение силы, действующей в бесконечно малый промежуток времени с бесконечно большим напряжением; эта сила сообщает материальной точке конечное изменение скорости при бесконечно малом ее смещении.

Не входя в детали, заметим, что совершенно аналогичные заключения имеют место также для сил более общего характера, нежели (13), подчиненных тому условию, что для всякого момента времени t, содержащегося между t_0 и t_1, интеграл

$$\int^{t} \boldsymbol{F} dt$$

сохраняет конечное значение, но вместе с ним остается также конечным и отличным от нуля вектор

$$\boldsymbol{I} = \lim_{t_1 \to t_0} \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{F} dt.$$

Интегрируя при этих предположениях основное уравнение механики $m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$ от t_0 до t, получаем, во-первых:

$$m\,(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_0) = \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{F} dt;$$

это устанавливает, что скорость движущейся точки все время остается конечной. Но если затем в этом последнем уравнении положим $t = t_1$ и будем приближать к нулю интервал интегрирования, то получим:

$$m\,\Delta\boldsymbol{v} = \boldsymbol{I};$$

интегрируя же в пределах от t_0 до t_1 тождество $\frac{dP}{dt} = \boldsymbol{v}$, получим, как выше:

$$\Delta P = \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{v}\, dt.$$

Это равенство показывает, что ΔP стремится к нулю вместе с интервалом интегрирования, ибо $\boldsymbol{v}$, как мы только что видели, сохраняет во всем этом интервале конечное значение.

Во всех этих случаях, когда силы, действующие с весьма большим напряжением в течение чрезвычайно малого промежутка времени, сообщают материальной точке смещение, которым можно пренебречь, но внезапно меняют ее скорость, они называются *ударами*; они вычисляются по своему мгновенному импульсу, т. е. по изменению количества движения, ими вызываемому; уравнение

$$I = m\Delta v$$

в теории ударов играет роль, совершенно аналогичную той, которую при изучении обыкновенных сил имеет основное уравнение динамики.