ГЛАВА IX.

Механические единицы и размерности механических величин.

1. Механические единицы.

1. Первичные и производные величины. При изучении механики мы постепенно пришли к различного рода величинам, частью скалярным, частью векториальным. К геометрическим величинам — прямолинейным отрезкам и дугам кривых, поверхностям, объемам — мы присоединили *кинематические величины: времена, скорости (разного рода), ускорения*; наконец, в последних двух главах мы сюда присоединили еще величины, которые мы можем назвать *динамическими: силы* (и, в частности, *удары*), *массы, живые силы и работы, мощности, импульсы и количества движения*. В связи с этим необходимо изложить некоторые соображения, совершенно элементарного характера, но основного значения об *измерении* этих различных величин; при этом все эти величины мы будем рассматривать как скаляры, т. е. мы будем обращать внимание даже при векториальных величинах только на абсолютные их значения.

Прежде всего, к какому бы типу ни принадлежали перечисленные выше величины, для измерения любой из них мы можем выбрать совершенно произвольно *единицу меры*, т. е. то значение соответствующей величины, которому мы, условно, припишем значение единицы; после этого число, измеряющее всякое другое значение той же величины, будет уже вполне определено; но такой совершенно произвольный выбор каждой единицы меры, не зависящий от различных других единиц, теоретически вполне дозволенный, не удобен на практике, так как он не учитывает зависимостей, связывающих различные типы величин; он приводит к тому, что в формулу приходится вводить коэффициенты пропорциональности, бесполезно усложняющие вычисления. Именно чтобы избежать этих неудобств, мы в геометрии, установив единицу длины (метр) за единицу плоскости и объема, принимаем соответственно *квадрат со стороной, равной единице, и куб с ребром*, равным единице: квадратный метр, кубический метр [1]).

---

[1]) Чтобы убедиться в этом наиболее тривиальном случае, насколько справедливо предыдущее соображение, предположим, что за единицу площади

С этой точки зрения единица длины называется *основной* или *первичной*, поскольку она выбрана совершенно произвольно и условно; напротив, единицы площади и объема называются вторичными или *производными*, поскольку они определены уже при помощи единицы длины и притом на основе определенных соотношений, существующих между поверхностями и объемами, с одной стороны, и прямолинейными отрезками — с другой (пропорциональность прямоугольников и параллелепипедов с данным основанием, соответствующим высотам). По той же причине и самые длины называются *первичными величинами*, поверхности и объемы — *производными величинами*.

Совершенно аналогичное различие можно установить, как мы сейчас увидим, в области кинематических и динамических величин; нелишним будет, однако, отметить, что даже и в случае геометрических величин такого рода различие в конечном счете носит чисто условный характер, поскольку оно зависит от частного выбора единиц площади и объема.

2. Кинематические единицы. Для измерения времени, как хорошо известно (II, рубр. 3), единица устанавливается непосредственно на основе астрономических наблюдений (год, сутки, час, минута, секунда — по надобности). Таким образом в кинематике к *длинам* в качестве *первичных величин* присоединяются *промежутки времени*. Это, так сказать, обусловливается тем обстоятельством, что между этими двумя видами величин не имеет места никакая натуральная зависимость, которая позволила бы на основе естественных критериев *вывести* единицу времени из единицы длины.

Напротив того, когда единицы времени и длины уже установлены, то всякая скорость представляется производной величиной по самому своему определению: она определяется отношением (или пределом отношения) некоторой длины к некоторому промежутку времени. Поскольку единицы длины и времени установлены, мера скорости непосредственно определяется, можно сказать, сама собой, именно, за единицу скорости естественно принять скорость равномерно движущегося тела, которое проходит единицу пути (т. е. единицу длины) в единицу времени.

Совершенно так же обстоит дело с ускорениями, которые представляют собой отношение или пределы отношений скорости ко времени. Естественной единицей ускорения, в соответствии с предыдущими соображениями, является ускорение равномерно-ускоренного движения, в котором скорость возрастает на единицу в единицу времени.

Таким образом в кинематике мы имеем две *основные единицы*: единицу *длины* и *времени*. Если, например, за единицу длины

принят квадрат, сторона которого содержит k единиц длины (а не одну), тогда площадь прямоугольника со сторонами a и b выражается формулой $\frac{ab}{k^2}$, вместо обычного произведения ab.

принять метр, а за единицу времени — секунду, то все остальные единицы указанными выше соображениями вполне определены. Хорошо известно, что в геометрии каждой из упомянутых двух производных единиц дается особое название (квадратный и кубический метр); меры, таким образом, указываются без напоминания произведения длин, от которых они происходят, по крайней мере в явной форме.

Напротив того, в кинематике не представляется нужным давать особое наименование единицам скорости и ускорения, так как более наглядной и выразительной является непосредственная формулировка: скорость в столько-то метров в секунду.

3. Небесполезно будет вновь отметить, что уже площади и объемы, равно как скорости и ускорения, являются производными величинами только в силу наших соглашений. По существу ничто не препятствует тому, чтобы рассматривать и эти величины как независимые от других; для этого было бы достаточно исходить из их специфического характера и установить единицы меры путем непосредственного сопоставления. Это можно было бы сделать следующим образом.

Для определенности рассмотрим скорости и займемся наиболее простым случаем (от которого можно перейти к общему путем предельного перехода) прямолинейных и равномерных движений. Представим себе, что мы имеем прямое наглядное представление о скоростях как об основных физических единицах, что мы в состоянии судить о скорости по характеру наблюдаемого движения и отсюда установить критерий измерения. Положим, что нам даны два равномерные движения:

$$s = at + b,$$
$$s_1 = ht + k,$$

скорости которых мы сопоставляем, сравнивая пути, пройденные в одно и то же время. Мера одной скорости по отношению ко второй, принятой за единицу, таким образом, выразится отношением

$$\frac{a(t_2 - t_1)}{h(t_2 - t_1)} = \frac{a}{h}$$

расстояний, пройденных в один и тот же промежуток времени от t_1 до t_2. Мера скорости $\frac{a}{h}$, к которой мы, таким образом, приходим, отличается от обычной (отношение пути к времени) постоянным численным множителем $\frac{1}{h}$, зависящим от выбора единицы. Этот совершенно очевидный вывод обусловливается тем, что введение коэфициента пропорциональности эквивалентно произвольному выбору единицы меры. На практике оказалось наиболее целесообразным просто положить $h = 1$ и этим представить скорость (таким же образом и ускорение) как величину производную по самому своему определению.

4. Динамические единицы. Техническая система единиц. В динамике мы пришли к понятию о силе на основе непосредственных представлений о наиболее простой физической силе — весе; между тем, все остальные динамические величины были последовательно введены при помощи силы, а также геометрических и кинематических величин. Если поэтому примем единицу силы за *первичную*, то все остальные единицы динамических величин можно будет рассматривать как *производные*; в частности, совершенно ясно, что этим путем по основным единицам могут быть определены единицы массы, работы и т. д. Таким образом в механике все единицы оказываются определенными, когда условно установлены *три основные единицы*, именно единицы *длины*, *времени* и *силы*. Систему единиц, построенную на этом основании, т. е. основанную на этих трех первичных единицах, принято называть *технической* или *практической*. Заметим, что и тут остается еще широкий простор для выбора трех основных единиц. Как уже было указано выше (VII, рубр. **13**), на практике в качестве *единицы силы* обыкновенно принимается *килограмм-вес*, т. е. сила тяжести, которая действует на 1 *дм*³ дистиллированной воды при 4° С и 760 *мм* атмосферного давления; правильнее сказать, это есть вес *килограмма-эталона*, который представляет собой цилиндр, сделанный из платины и хранящийся в Международной палате мер и весов в г. Севре во Франции (Bureau international des poids et mesures). И тогда для массы, которая, как мы видели (VII, рубр. **14**), выражается отношением веса к ускорению:

$$m = \frac{p}{g},$$

за единицу нужно будет принять (если угодно, вывести ее из ранее установленных единиц) массу такого тела, для которого это отношение сводится к единице, т. е. массу тела, вес которого приблизительно составляет 9,8 *кг*. Эта единица не имеет особого наименования, но зато особое наименование присваивается практической единице работы, это есть *килограммометр*, т. е. работа, которую выполняет сила веса в 1 *кг* при смещении точки ее приложения в направлении и в сторону действия самой этой силы на 1 *м*.

Наконец, *мощность* измеряется на практике в *лошадиных силах*. Лошадиная сила равна 75 килограммометрам в секунду и обозначается обыкновенно через HP от английского слова Horse-Power. Иногда за единицу мощности принимается также единица, называемая *понселе*, которая составляет 100 килограммометров в секунду.

5. Абсолютные системы единиц. В технической системе, которую мы рассматривали в предыдущей рубрике, за первичную единицу принимался вес, а масса определялась как величина произвольная на основе соотношения:

$$m = \frac{p}{g} \text{ или } mg = p,$$

которое представляет собой не что иное, как частный случай основного уравнения динамики:

$$ma = F.$$

Но, как мы хорошо знаем, сила веса носит локальный характер; поэтому, если мы желаем быть точными и иметь для весов строго определенную единицу, то необходимо указать место, которому этот вес соответствует. Если за такое место принять Париж, то 1 *л* дестиллированной воды (при 4° С и 760 *мм* давления) в Риме уже не весит точно 1 *кг*, а несколько меньше, поскольку местные веса относятся между собой, как соответствующие ускорения силы тяжести; это значит: литр дестиллированной воды весит в Риме 9,8038 — в Париже 9,8096 *кг* (II, рубр. 27).

Этой поправкой, очевидно, можно пренебречь в промышленности; и с этой точки зрения в технике единица веса может быть принята без сколько-либо чувствительной практической погрешности за основную единицу механических и технических величин.

Но иначе обстоит дело с точки зрения теоретической. Гаусс [1]) первый заметил, что с научной точки зрения будет предпочтительнее принять за первичную единицу массы вместо единицы силы. В самом деле, вследствие внутреннего, ингерентного характера массы при таком выборе не представляется надобности локальной спецификации этой единицы. Тело, которое дает единицу массы в Париже, теоретически остается единицей, куда бы мы его ни перенесли. В соответствии с этим принято называть *абсолютной системой* всякую систему мер, которая принимает за первичные величины *длину*, *время* и *массу* [2]).

---

[1]) Карл Фридрих Гаусс (Carl Fridrich Gauss) родился в Брауншвейге в 1777 г., умер в Гёттингене в 1855 г.; с 1807 г. до своей смерти состоял профессором Гёттингенского университета и директором астрономической обсерватории при университете. Гаусс является создателем диференциальной геометрии на поверхностях и метода наименьших квадратов, а также основных теорий математической физики; это был самый крупный аналитик, астроном и геодезист первой половины XIX в.; современники дали ему название „princeps mathematicorum" (первый из математиков). Его девизом было *pauca sed matura* (немного, но зрело); и действительно, его творения отличаются совершенством обработки; но „немногое" все же заполняет одиннадцать больших томов.

[2]) Собственно говоря, это название „абсолютная система единиц" имеет иной источник. В XVIII в. ставили себе задачей установить такую систему мер, которая не зависела бы от сохранности эталонов, т. е. которую можно было бы восстановить, если бы эталоны были утрачены. Для осуществления этого были сделаны различные предложения, из которых в пору конвента французские физики остановились на той системе единиц, которая, действительно, сохранилась по настоящее время. Как известно, отправной единицей служил *метр*, длина которого должна была составлять одну десятимиллионную часть четверти земного меридиана, проходящего через Парижскую

За единицу массы можно принять, например, эталон, который мы прежде принимали за единицу веса, т. е. массу 1 *дм*³ дестиллированной воды. Эту единицу называют *килограмм-массой*; обыкновенно ее просто называют килограммом, когда не представляется опасности смешать ее с килограмм-весом. Поскольку установлены в качестве единицы меры и времени метр и секунда, основное соотношение

$$F = ma$$

обнаруживает, что единицей силы целесообразнее всего принять в этих условиях ту силу, которая, действуя с постоянным напряжением на единицу массы, способна увеличить скорость материальной точки на один метр в секунду. Если мы желаем материализовать эту единицу силы при помощи веса, то ее нужно будет установить при помощи эталона по формуле $p = mg$, т. е. взять тело, масса которого $m = \frac{1}{g}$. Такой эталон, вес которого будет равен единице (в абсолютной мере), должен меняться от места к месту; с грубым приближением вес одной десятой литра воды может быть приравнен этой единице; он приблизительно, таким образом, совпадает с весом одного гектограмма, но, конечно, это приближение допустимо только в условиях, не требующих выдержанной научной точности.

6. **Система** *CGS* (сантиметр, грамм, секунда) представляет собой абсолютную систему, которая отличается от указанной выше только тем, что за единицу длины принимается не метр, а сантиметр, а за единицу массы — грамм.

Соответствующая единица силы получила название *дины*. Таким образом дина есть сила, которая сообщает материальной точке, имеющей массу в один грамм, ускорение сантиметр в секунду за секунду.

Чтобы установить численную зависимость между диной и весом грамма, припомним прежде всего, что ускорение силы тяжести g, выраженное в системе *CGS*, составляет в Риме 980,38, а в Париже 980,96. Мы можем принять его приблизительное значение равным 9,8 или, в круглых цифрах, 10.

С другой стороны, вес грамма в силу обычного соотношения $p = mg$ равен g раз взятому грамму массы; но произведение mg представляет собой силу, и число, ее выражающее, укажет,

обсерваторию. Однако эталон, изготовленный на основе сложной геодезической съемки, при повторном измерении длины земного меридиана не совпал с новым результатом измерения; обнаруженная разница оказалась, конечно, очень незначительной, но все же, несомненно, существовала. Вместе с тем совершенно выяснилось, что установить какие бы то ни было единицы меры, которые можно было бы признать абсолютными вследствие их неизменности, совершенно невозможно. Ввиду этого под абсолютными единицами в настоящее время разумеют те, которые определяются тщательно изготовленными и тщательно сохраняемыми эталонами, находящимися в Международной палате мер и весов в Севре. Название „абсолютная система“ имеет в настоящее время только историческое значение. (*Ред.*)

сколько грамм-вес содержит дин (конечно, если m и g выражены в единицах системы *CGS*). Таким образом

$$1 \text{ г (вес)} = g \text{ дин} = 980 \text{ дин},$$

т. е.

$$1 \text{ дина} = \frac{1}{980} \text{ г (веса)};$$

отсюда следует

$$1 \text{ кг (вес)} = 10^3 \cdot 980 \text{ дин}. \tag{1}$$

Таким образом, грубо говоря, 1 *кг* составляет 10^6 дин; это кратное единицы силы получило специальное название *мегадины*. Точнее мегадина составляет $10^6/10^3\ g$ *кг*, т. е. приблизительно 1,02 *кг*.

Единицей работы в системе *CGS* служит *эрг*, который соответствует работе, выполняемой силой (постоянной) в одну *дину* при смещении точки ее приложения на 1 *см* в направлении силы. Из соотношения (1) непосредственно вытекает, что зависимость между килограммометром (предыдущая рубрика) и эргом выражается равенством:

$$1 \text{ эрг} = \frac{1}{10^5 \cdot 980} \text{ кг},$$

т. е., полагая 10^6 эргов = 1 мегаэргу:

$$1 \text{ мегаэрг} = \frac{1}{98} \text{ кгм};$$

таким образом один мегаэрг незначительно превышает 1/100 *кгм*. Электрики вместо эрга (или мегаэрга) в качестве единицы работы пользуются *джоулем*, который равен 10^7 эргов (т. е. работе мегадины при смещении в 1 *дм*), поэтому

$$1 \text{ джоуль} = \frac{1}{9{,}8} \text{ кгм}. \tag{2}$$

Наконец, единицей мощности в системе *CGS* служит мощность силы, которая выполняет работу в 1 эрг в течение секунды; однако этой единице не присвоено особого названия: вместо нее электротехники пользуются единицей *ватт*, равной мощности одного джоуля в секунду; *киловатт* составляет 10^3 ватт. Поэтому 1 HP, составляющая 75 *кгм/сек*, выводится из равенства (2).

$$1 \text{ киловатт} = \frac{10^3}{9{,}8 \cdot 75} \text{ HP},$$

что приблизительно составляет 1,36 HP.

И аналогично этому находим:

$$1 \text{ киловатт} = \frac{1}{0{,}98} \text{ понселе}.$$