2. Размерности механических величин. Однородность.

7. Мера поверхности представляет сумму или предел суммы произведений двух длин. Если все числа, выражающие эти длины, будут умножены на одно и то же число λ, как это имеет, например, место, когда мы меняем единицу длины, принимая за новую единицу $\frac{1}{\lambda}$ часть первоначальной, то число A, выражающее плоскость, увеличивается в λ^2 раз; иными словами, оно представляет собой однородную функцию второй степени различных длин, от которых оно зависит. Согласно обозначению, введенному Максвэллом [1]), это обозначают знакоположением:

$$[A]=l^2.$$

Вообще, если в некоторой абсолютной системе единиц Q есть мера величины, которая зависит не только от некоторого количества длин, но и от какого-либо количества времен и какого-либо количества масс, то для выражения того факта, что Q представляет собой однородную величину степени n_1 относительно длин, степени n_2 относительно времен и степени n_3 относительно масс пишут:

$$[Q]=l^{n_1}\, t^{n_2}\, m^{n_3};$$

показатели n_1, n_2, n_3 называются *размерами величины* Q; написанное же выше символическое уравнение называется *уравнением размерности* величины, в соответствии с чем размеры n_1, n_2, n_3 часто называют также *показателями размерности* величины.

Если один из размеров равен нулю, то дело обстоит так, как если бы Q вовсе не зависело от соответствующего аргумента; так, например, предыдущее символическое равенство $[A]=l^2$ можно было бы также написать в виде $[A]=l^2t^0m^0$; но обыкновенно при указании размерности предпочитают вовсе опускать те множители, которым соответствовал бы показатель нуль.

После сказанного ясно, что для объема v

$$[v]=l^3;$$

для скорости (отношение или предельное отношение длины ко времени):

$$[v]=lt^{-1},$$

для ускорения:

$$[a]=lt^{-2}.$$

[1]) Джемс Клерк Максвэлл (James Clerk Maxwell) родился в Эдинбурге в 1831 г., умер в Кембридже в 1879 г., состоял профессором физики в Кембриджском университете с 1871 г. Этот выдающийся физик и математик дал математическое выражение наглядным экспериментальным представлением Фарадея. В своем классическом труде „Treatise on electricity and magnetism" (London 1873) он предусмотрел электрические волны, позже реализованные Герцем, и получившие широкое применение благодаря Маркони. Максвэлл в том же сочинении установил электромагнитную теорию света. Ему мы обязаны также первой количественной разработкой кинетической теории газов.

Из всего этого следует, что сила, поскольку мы рассматриваем ее как производную величину, определяемую основной формулой, имеет размерность:

$$[F]=lt^{-2}m\,.$$

Работа (сумма произведений из сил на длины) представляет собой однородное выражение вида:

$$[L]=l^2t^{-2}m\,;$$

то же самое нужно сказать о потенциале в тех случаях, когда таковой существует, так как он представляет собой не что иное, как некоторую работу (рубр. 6 предыдущей главы).

Для живой силы T (полупроизведение из массы на квадрат скорости) мы снова получаем то же выражение:

$$[T]=l^2t^2m;$$

это можно было и предвидеть: количества L и T не могут быть различны с точки зрения их размерностей, потому что они представляют собой одну и ту же физическую сущность — энергию.

Для мощности Π (отношение между работой и временем) имеем:

$$[\Pi]=l^2t^{-3}m\,.$$

Наконец, количество движения (произведение скорости на массу) и импульс (произведение или сумма произведений из сил на промежутки времени) имеют общую размерность:

$$[I]=lt^{-1}m\,.$$

Это совпадение, конечно, можно было бы предвидеть, поскольку в силу соотношения (12) предыдущей главы всякий импульс можно рассматривать как разность двух количеств движения.

8. Если же мы примем техническую систему единиц и, следовательно, рядом с длиной и временем будем считать первичной величиной *силу*, а не массу, то размерности механических единиц изменятся; прежде всего, вследствие основного соотношения динамики, мы получим теперь для массы размерность:

$$[m]=l^{-1}t^2f, \tag{3}$$

где f есть общее обозначение силы. Таким же образом для других динамических величин, учитывая их размерности, основанные на их определениях, мы получим символические уравнения:

$$[L]=lf,\quad [\Pi]=lt^{-1}f,\quad [I]=tf.$$

Эти уравнения можно вывести из соответствующих равенств предыдущей рубрики, подставляя в последние вместо массы m выражение (3).

9. Изменение единиц. Размерности механических величин позволяют удобно вычислить, как изменяется число q, выражающее величину Q (т. е. мера этой величины), когда мы изменим единицы первичных величин. В самом деле, если в какой-либо данной абсолютной системе мы уменьшим единицу длины в отношении 1 к $\frac{1}{\lambda}$, единицу времен в отношении 1 к $\frac{1}{\tau}$ и, наконец, единицу массы в отношении 1 к $\frac{1}{\mu}$ и

$$[Q] = l^{n_1} t^{n_2} m^{n_3},$$

то из тройной однородности размера рассматриваемой величины относительно длин, времен и масс следует, что соответствующая производная единица уменьшится в отношении единицы к

$$\frac{1}{\lambda^{n_1}\tau^{n_2}\mu^{n_3}} = \lambda^{n_1}\tau^{n_2}\mu^{n_3},$$

а измеряющее эту величину число q будет умножено на

$$\chi = \lambda^{n_1}\tau^{n_2}\mu^{n_3}.$$

Это произведение называется *коэфициентом приведения* величины с размерами n_1, n_2, n_3.

Таким образом, если мы обозначим через ν, α, φ, ε, π, ι коэфициенты приведения, относящиеся к скорости, ускорению, силе, энергии, мощности и импульсу, то мы выведем из соответствующих уравнений размерности соотношения:

$$\nu = \lambda\tau^{-1}, \quad \alpha = \lambda\tau^{-2}; \tag{4}$$

$$\varphi = \lambda\tau^{-2}\mu, \; \varepsilon = \lambda^2\tau^{-2}\mu, \; \pi = \lambda^2\tau^{-3}\mu, \; \iota = \lambda\tau^{-1}\mu. \tag{5}$$

Если же принята техническая система единицы, то, естественно коэфициенты приведения (4) скорости и ускорений останутся без изменения, но коэфициенты приведения массы и других производных динамических единиц изменятся, именно примут вид:

$$\mu = \lambda^{-1}\tau^2\varphi, \qquad \varepsilon = \lambda\varphi, \; \pi = \lambda\tau^{-1}\varphi, \qquad \iota = \tau\varphi. \tag{6}$$

Системы (4), (5) и (4), (6) алгебраически между собой эквивалентны: первая выражена через λ, τ, μ, вторая — через λ, τ, φ. Совершенно ясно, что возможны и многообразные другие эквивалентные схемы. В соответствии с этим три величины называются *независимыми по своей размерности*, если одночленное выражение их коэфициентов приведения, выраженное через λ, τ, μ, алгебраически независимо; в этом случае те же величины будут независимы, если мы их выразим через λ, τ, φ по схеме (6).

Так, например, три величины — длина, масса и сила (которые отличаются от фундаментальных величин технической системы только тем, что в ней масса заменяет время) — представят собой независимую систему величин; точно так же независимую систему образуют скорость, ускорение и энергия, поскольку

$$\nu = \lambda\tau^{-1}, \quad \alpha = \lambda\tau^{-2}, \quad \varepsilon = \lambda^2\tau^{-2}\mu;$$

напротив того, время, энергия и мощность по своим размерностям не могут считаться независимыми, поскольку в силу соотношений (5) имеет место равенство $\pi = \varepsilon\tau^{-1}$.

По самому определению размерности ясно, что по данным трем независимым единицам коэфициенты приведения всех других величин могут быть выражены в коэфициентах, соответствующих этим трем величинам. Так, если мы фиксируем три величины — скорость, ускорение и энергию, — то на основе соотношений (4) и (5) или эквивалентных им соотношений (4) и (6) будем иметь:

$$\lambda = \nu^2\alpha^{-1}, \quad \tau = \nu\alpha^{-1},$$

$$\mu = \nu^{-2}\varepsilon, \quad \varphi = \nu^{-2}\alpha\varepsilon, \quad \pi = \nu^{-1}\alpha\varepsilon, \quad \iota = \nu^{-1}\varepsilon.$$

Мы можем также сказать, что всякие три величины, независимые друг от друга по своим размерностям, могут быть приняты за первичные величины, и с их помощью все другие могут быть определены как производные величины.

Все эти соображения часто находят себе применение в вычислениях, связанных с изменением единиц меры; в различных случаях оказывается целесообразным принять в качестве первичных те или иные независимые величины и с их помощью устанавливать единицы для измерения остальных величин.

10. Если какая-либо величина, определенная при помощи длины, времени и массы, имеет все три показателя размерности, равные нулю (в каковом случае ее показатели размерности будут также равны нулю, какие бы три величины мы ни приняли за основные), то мера такой величины не меняет своего численного значения, как бы мы ни изменили первичные единицы. Относительно такой величины принято говорить, что она выражается *чистым числом* или просто *числом.*

Таковой является мера угла, выраженная в радианах (отношение длины дуги круга к соответствующему радиусу); отсюда следует, что угловая скорость (отношение угла ко времени) имеет размерность t^{-1}.

11. Однородность. Допустим, что между механическими величинами, играющими роль в некотором определенном явлении, существует зависимость, в которой получает свое выражение самый закон этого явления. Если обозначим через q число, выражающее, скажем, в некоторой определенной абсолютной системе одну из этих механических единиц, связанных названной зависимостью, то мы можем разрешить соответствующее уравнение относительно q и выразить, таким образом, q через различные величины, которые составят правую часть равенства; она будет зависеть от длин $l_1, l_2, l_3, \ldots$, от времен $t_1, t_2, t_3, \ldots$ и от масс $m_1, m_2, m_3, \ldots$

Уравнение, которое выражает закон рассматриваемого явления, можно поэтому представить в виде:

$$q = \psi(l_1, l_2, \ldots; t_1, t_2, \ldots; m_1, m_2, \ldots); \tag{7}$$

это уравнение, поскольку оно выражает закон самого явления, должно остаться в силе, какова бы ни была система принятых единиц. Но если мы уменьшим единицы длины, времени и массы в отношениях 1 к $\frac{1}{\lambda}$, $\frac{1}{\tau}$, $\frac{1}{\mu}$, то числа l_i, t_i, m_i ($i = 1, 2, 3, \ldots$) окажутся умноженными на λ, τ, μ, а число q на $\lambda^{n_1}\tau^{n_2}\mu^{n_3}$, где n_1, n_2, n_3 суть размеры (показатели размерности) соответствующей механической величины. Поэтому совместно с соотношением (7), как бы ни были выбраны числа λ, τ, μ, должно будет иметь место уравнение:

$$\lambda^{n_1}\tau^{n_2}\mu^{n_3} q = \psi(\lambda l_1, \lambda l_2, \ldots; \tau t_1, \tau t_2, \ldots; \mu m_1, \mu m_2, \ldots). \tag{8}$$

Это значит, что уравнение (7) должно быть однородным, и притом степени n_1 относительно длин, n_2 относительно времени, n_3 относительно масс; иначе говоря, всякое уравнение, выражающее механический закон какого-либо явления, обладает тройной однородностью относительно длин, времен и масс, от которых оно зависит. Совершенно такая же однородность, конечно, имеет место также и относительно любых других трех величин, независимых по своим размерностям, если мы себе представим, что все величины, входящие в рассматриваемый закон, выражены через эти новые основные величины. Во всяком случае в этом смысле оказывается однородным основное уравнение динамики, равно как и уравнения, выражающие теоремы о живой силе, об импульсе и количестве движения:

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}, \quad L = T - T_0, \quad \boldsymbol{I} = \Delta(m\boldsymbol{v}).$$

3. Механическое подобие и модели.

12. К соображениям предыдущего параграфа о размерах механических величин и об изменении соответствующих единиц присоединяется теория механического подобия, краткий очерк которой мы здесь дадим.

Прежде всего, напомним, что две системы точек называются *геометрически подобными*, если между точками одной и другой системы можно установить двуоднозначное соответствие (взаимно однозначное соответствие) таким образом, что гомологичные (соответственные) отрезки всегда сохраняют одно и то же отношение λ. Отсюда, как известно, вытекает равенство соответствующих углов, а также пропорциональность гомологичных площадей и объемов соответственно в отношениях λ^2 и λ^3.

13. Кинематическое подобие. Рассмотрим две системы точек Σ и Σ', находящиеся в движении относительно одной и той же системы отсчета $\Omega\xi\eta\zeta$ — первая в промежутке времени от t_0 до t_1, вторая в промежутке времени, вообще отличном от первого, от t_0'