обозначая поэтому через c отношение

$$\frac{f}{\pi^{\frac{2}{3}}}$$

[кубичный корень из характеристической постоянной (17) пропеллера ω], мы видим, что можно считать раз навсегда

$$F = c\lambda^{\frac{8}{3}}\Pi^{\frac{2}{3}}.$$

Эта формула приводит к интересному выводу; диаметр λ винта и мощность, с которой функционирует мотор, по крайней мере в известных границах, находятся в распоряжении экспериментатора и потому могут быть рассматриваемы как две независимые переменные (предполагается, конечно, что эксперименты производятся над пропеллерами одного и того же типа).

Мы не будем здесь останавливаться долее на этом соображении; прибавим только, что Ренар (Rénard, умер в 1905 г.) вывел из этих принципов очень изящные теоремы и замечательные практические следствия для так называемых геликоптеров (аппараты для поддержания определенной высоты, схематически состоящие из винта, вращающегося вокруг вертикальной оси). Ныне геликоптеры отошли на второй план по сравнению с аэропланами.

УПРАЖНЕНИЯ
к гл. VII—IX.

1. Компоненты позиционной силы выражаются уравнениями:

$$X = -ky, \quad Y = kx, \quad Z = 0,$$

где k обозначает какую угодно функцию места. Показать, что силовыми линиями служат окружности, центры которых расположены на оси z. Применить к примеру d) гл. VII, рубр. **29**.

2. В плоском поле компоненты силы принадлежат к типу

$$X = -k\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad Y = k\frac{\partial\psi}{\partial x},$$

где k и ψ суть функции места. Показать, что силовые линии выражаются уравнением $\psi(x, y) = \text{const}$.

3. Сила, компоненты которой X, Y, Z выражаются по порядку функциями одного только x, одного только y, одного только z, принадлежит консервативному полю. Указать потенциал и применить к частному случаю, в котором при постоянных k и n

$$X = kx^n, \quad Y = ky^n, \quad Z = kz^n.$$

4. Пруд, занимающий площадь в 1 *км*² и средней глубиной в 20 *см*, осушается центробежными насосами, которые выбрасывают воду на высоту 5 *м* над уровнем пруда. Какую работу должны выполнить насосы, чтобы осушить весь пруд (для простоты следует допустить, что каждая частица воды выбрасывается на высоту в 5,1 *м*).

5. Тело весом в 50 *кг* скатывается на 8 *м* по линии наибольшего ската плоскости, наклоненной к горизонту на 30°; оно испытывает при этом сопротивление, направленное противоположно движению, в 20 *кг*. Вычислить работу, производимую при этом спуске обеими силами — весом и сопротивлением.

6. Тяжелое тело весом в 0,8 *кг* находится на высоте 14 *м* над уровнем земли; оно брошено вертикально вниз с начальной скоростью 4 *м* в секунду. Показать, что кинетическая энергия, с которой тело достигает точки падения, составляет 11,85 *кг* (сопротивлением воздуха при этом пренебрегаем).

7. Какова кинетическая энергия T, которой обладает снаряд весом в 129 *кг*, брошенный в пустоте с начальной скоростью в 600 *м/сек* под углом в 30° к горизонту, в момент, когда он достигает верхней точки траектории? ($T = 165\,306$ *кг*).

8. Какова мощность мотора, способного поднять 10 раз в минуту вес в 80 *кг* на высоту в 4,5 *м*, предполагая, что 25% мощности поглощается внутренними сопротивлениями (1,066 HP).

9. Известно, что киловатт-час электрической энергии для нужд отопления стоит 0,45 лиры и что 1 $м^3$ газа, дающий 3800 *кал*, стоит 0,75 лиры. Определить отношение расходов при том же количестве использованных калорий, полученных одним и другим способами.

При указанных заданиях электрическое отопление обходится, примерно, в 2,5 раза дороже газового.

10 Современный локомотив, мощность которого достигает 1200 HP, может тащить по плоскости и прямолинейной колее при наибольшей скорости в 108 *км* в час поезд весом в 450 *т* (включая сюда и вес локомотива). Принимая, что при наибольшей скорости вся мощность локомотива затрачивается на преодоление сопротивлений (которые можно считать постоянными), требуется:

1) вычислить полное сопротивление (в килограммах),

2) определить, на каком расстоянии остановится поезд, если локомотив перестанет действовать при наибольшей скорости поезда (6888 *м*).

11. Из элементов электростатики известно, что две электрические массы e и e' того же рода (поскольку их можно рассматривать как точечные заряды) на расстоянии r оказывают друг на друга притяжение, пропорциональное

$$\frac{ee'}{r^2}.$$

Требуется установить единицу электрического заряда (или, как говорят также, „количества электричества") таким образом, чтобы коэфициент пропорциональности обратился в единицу. Показать, что размерность количества электричества выражается формулой $l^{\frac{3}{2}} t^{-1} m^{\frac{1}{2}}$.

12. В абсолютной системе единиц, которой пользуются в электротехнике, единицей длины служит 10^7 *м*, единицей времени служит секунда, а единицей массы 10^{-11} *г*. Показать, что единицей (производной) работы служит как раз джоуль, равный 10^7 эргов (IX, рубр. 6).

13. Метод нулевых размерностей [1]**. Алгебраические предпосылки.** Три одночлена, определяемые формулами

$$\xi = x^{a_1}y^{b_1}z^{c_1}, \quad \eta = x^{a_2}y^{b_2}z^{c_2}, \quad \zeta = x^{a_3}y^{b_3}z^{c_3}. \tag{1}$$

называются независимыми, если уравнения (1) могут быть разрешены относительно x, y, z.

Если мы возьмем логарифмы обеих частей каждого из этих уравнений, то при независимости этих одночленов вновь полученные уравнения должны разрешаться относительно $\lg x$, $\lg y$, $\lg z$. Отсюда следует, что необходимое и достаточное условие независимости трех одночленов заключается в том, чтобы

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{2}$$

---

[1]) Заимствовано из исследований Д. Рябушинского („Известия Аэродинамического института в Кучино, Москва, 1912 г.) и Странео (*P. Straneo*, Rend, della R. Accademia dei Lincei, 2-e sem. 1917).

Аналогично этому определяется также независимость одночленов, представляющих функции двух переменных

$$\xi = x^{a_1}y^{b_1}, \quad \eta = x^{a_2}y^{b_2}.$$

Из этих определений непосредственно вытекает следующая теорема: *если* ξ, η, ζ *суть три одночлена, независимые относительно* x, y, z, *то каждый одночлен вида* $x^a y^b z^c$ *можно представить* в форме $\xi^\gamma\eta^\beta\zeta^\gamma$.

В самом деле, в силу исходных соотношений (1), можно написать:

$$\xi^\alpha\eta^\beta\zeta^\gamma = x^{a_1\alpha + a_2\beta + a_3\gamma} \quad y^{b_1\alpha + b_2\beta + b_3\gamma}, \quad z^{c_1\alpha + c_2\beta + c_3\gamma};$$

но, поскольку удовлетворено условие (2), мы всегда можем определить α, β, γ из линейных уравнений:

$$\begin{aligned} a_1\alpha + a_2\beta + a_3\gamma &= a, \\ b_1\alpha + b_2\beta + b_3\gamma &= b, \\ c_1\alpha + c_2\beta + c_3\gamma &= c; \end{aligned}$$

после этого предыдущее равенство примет вид:

$$\xi^\alpha\eta^\beta\zeta^\gamma = x^a y^b z^c,$$

как это и требовалось доказать.

14. Независимость размерностей. Как было показано в рубр. 7 гл. IX, для любой величины Q в абсолютной системе имеет место символическое равенство:

$$[Q] = l^{n_1} t^{n_2} m^{n_3};$$

коэфициент приведения для численного значения q этой величины равен (IX, рубр. 9):

$$\chi = \lambda^{n_1}\tau^{n_2}\mu^{n_3}.$$

Мы будем говорить, что три величины Q', Q'', Q''' независимы по своим размерностям, если независимы их коэфициенты приведения. Иначе говоря, если соответствующие коэфициенты приведения выражаются формулами:

$$\begin{aligned} \chi' &= \lambda^{n_1'}\tau^{n_2'}\mu^{n_3'}, \\ \chi'' &= \lambda^{n_1''}\tau^{n_2''}\mu^{n_3''}, \\ \chi''' &= \lambda^{n_1'''}\tau^{n_2'''}\mu^{n_3'''}, \end{aligned} \tag{3}$$

то эти величины независимы, когда

$$\begin{vmatrix} n_1' & n_2' & n_3' \\ n_1'' & n_2'' & n_3'' \\ n_1''' & n_2''' & n_3''' \end{vmatrix} \neq 0.$$

Пример I. Скорость, ускорение и энергия являются независимыми механическими величинами, ибо их коэфициенты приведения имеют вид:

$$\nu = \lambda\tau^{-1}, \quad \alpha = \lambda\tau^{-2}, \quad \varepsilon = \lambda^2\tau^{-2}\mu.$$

Вместе с тем

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

Пример II. Скорость, сила и мощность суть зависимые по размерности величины, ибо

$$\nu = \lambda\tau^{-1}, \quad \varphi = \lambda\tau^{-2}\mu, \quad \pi = \lambda^2\tau^{-3}\mu;$$

определитель размерностей

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

ТЕОРЕМА. *Если Q', Q'', Q''' суть три независимые физические величины с коэфициентами приведения χ', χ'', χ''', выражаемыми уравнениями* (3), *то для всякой четвертой величины Q коэфициент приведения χ можно будет представить в виде:*

$$\chi = \chi'^{\alpha} \chi''^{\beta} \chi'''^{\gamma}. \tag{4}$$

Чтобы в этом убедиться, достаточно сообразить, что всякая физическая величина Q имеет коэфициент приведения вида:

$$\chi = \lambda^{n_1} \tau^{n_2} \mu^{n_3},$$

и применить теорему, установленную выше среди алгебраических предпосылок.

Если теперь примем во внимание, что, в силу соотношения (4), мера q величины Q является трехкратно однородной относительно мер q', q'', q''' рассматриваемых трех величин, то это соотношение, очевидно, может быть заменено символическим уравнением:

$$[q] = q'^{\alpha} q''^{\beta} q'''^{\gamma}. \tag{5}$$

Пример. Мы убедились выше, что скорость, ускорение и энергия суть три независимые величины. Выведем теперь размерность силы через v, a, e. Для этого достаточно определить α, β, γ из соотношения:

$$\lambda\tau^{-2}\mu = (\lambda\tau^{-1})^{\alpha}(\lambda\tau^{-2})^{\beta}(\lambda^2\tau^{-2}\mu)^{\gamma} = \lambda^{\alpha+\beta+2\gamma}\tau^{-\alpha-2\beta-2\gamma}\mu^{\gamma}.$$

Приравнивая показатели обеих частей этого уравнения, находим непосредственно, что $\gamma = 1$, а потому

$$\alpha + \beta + 2 = 1, \quad -\alpha - 2\beta - 2 = -2;$$

отсюда следует, что

$$\alpha = -2, \quad \beta = 1.$$

Итак, по отношению к скорости, ускорению и энергии сила имеет размеры:

$$[f] = v^{-2}ae.$$

Замечание. Полезно отметить как следствие предыдущих результатов, что *отношение между q и произведением $q'^{\alpha} q''^{\beta} q'''^{\gamma}$, в силу соотношения* (5), *представляет собой чистое число; иначе говоря, для этого отношения все показатели размерности равны нулю.*

Правило приведения к нулевым размерам. Предположим, что мера q некоторой физической величины может быть выражена через меры $q_1, q_2, \ldots, q_n$ других физических величин и некоторые другие числа, совокупность которых обозначим через r. Это значит:

$$q = f(q_1, q_2, \ldots, q_n \mid r). \tag{6}$$

Допустим, далее, что три из этих величин, скажем три первые, по своим размерностям независимы; согласно вышеприведенному замечанию, меры $n-3$ остальных величин могут быть выражены в виде произведения некоторых степеней количеств q_1, q_2, q_3 на чистые числа. Если совокупность последних обозначим через r', то соотношение (6) в конечном результате приведется к виду:

$$q = F(q_1, q_2, q_3 \mid r \mid r'). \tag{6'}$$

Но как мера физической величины q обладает трехкратной однородностью относительно трех независимых мер q_1, q_2, q_3; если поэтому α, β, γ суть показатели однородности q относительно q_1, q_2, q_3, то уравнение (6') можно написать в виде:

$$q = q_1^{\alpha} q_2^{\beta} q_3^{\gamma} F(1, 1, 1, \mid r, r'). \tag{6''}$$

К совершенно аналогичному результату мы приходим и в том случае, когда в числе n мер $q_1, q_2, \ldots, q_n$ имеются всего две независимые или даже только одна: множители при чистом числе F сводятся соответственно к двум или к одному.

Указанный прием, приводящий к соотношению (6″) или к аналогичным соотношениям (когда в правой части остаются только две независимые величины или даже только одна), получил название *метода нулевых размеров*. Он представляет собою, по существу, только следствие или алгорифмическое усовершенствование закона однородности, ограничивающего форму, в которой могут быть представлены зависимости между физическими величинами. В некоторых случаях он приводит к исчерпывающей характеристике такого рода соотношений.

ПРИМЕНЕНИЯ

1. Продолжительность колебания простого маятника. Проделать вновь вычисления рубр. **19** гл. IX, пользуясь методом нулевых размеров.

2. Сопротивление прямоугольной пластины. Прямоугольная пластина, настолько тонкая, что ее толщиной можно совершенно пренебречь, движется в среде, оказывающей ей сопротивление. Нужно определить, в каком виде может быть выражено это сопротивление, которое представляет собою результат давления, оказываемого жидкой средой на каждый элемент пластины.

Прежде всего непосредственно ясно, что мера r этого сопротивления должна зависеть, помимо размеров a, b прямоугольной пластины и ее наклона θ к направлению движения, еще от ее скорости v, а также от давления p и плотности ρ среды. Кроме того, опыты, систематически проводившиеся в последние годы для нужд воздухоплавания, обнаружили, что r существенно зависит также от *вязкости* жидкости; более того, основательные исследования *Рейнольдса* (Reynolds) показали, что в пределах обыкновенных скоростей (т. е. не достигающих скоростей снарядов или вообще скоростей, сравнимых со скоростью звука) именно это сопротивление вязкости имеет преобладающее значение.

Для вычисления *вязкости* представим себе внутри жидкости два смежных параллельных поверхностных элемента. Если dx есть расстояние между ними, dv — разность их скоростей (или относительная скорость одной площадки по отношению к другой), то опыт обнаруживает, что между двумя элементами проявляется отталкивательная сила, напряжение которой, отнесенное к единице площади, пропорционально *падению скорости* $\frac{dv}{dx}$; таким образом

$$\tau = \mu \frac{dv}{dx},$$

где μ есть так называемый *коэффициент вязкости*. Учитывая все это, мы приходим к предположению, что

$$r = f\,(a,\ b,\ \theta,\ v,\ p,\ \rho,\ \mu)\,.$$

Заменяя переменные a и b двумя другими k, σ, связанными с ними соотношениями

$$k = \frac{a}{b}\,, \quad \sigma = ab\,,$$

т. е. представляющими так называемую удлиненность пластины и ее плотность, а также выделяя переменные k и θ, выражаемые чистыми числами, представим предыдущую зависимость в виде:

$$r = f_1\,(\sigma,\ v,\ p,\ \rho,\ \mu \,|\, k,\ \theta)\,.$$

Так как, с другой стороны,

$$[\sigma] = l^2, \quad [v] = lt^{-1}, \quad [\rho] = l^{-3}m\,,$$

то совершенно ясно, что σ, v, ρ по *по своим размерам независимы*. Чтобы в этом убедиться, достаточно вычислить определитель размерностей или же просто принять во внимание, что σ и v равнонезависимы, а ρ зависит от массы, которая в выражение этих двух других величин не входит.

Через эти три переменные можно выразить давление p. Так как p есть давление, оказываемое средой на единицу площади, то оно представляет собою отношение силы к площади, а потому

$$[q] = l^{-1}t^{-2}m.$$

Поэтому μ (отношение давления на единицу площади к падению скорости) имеет размерность:

$$[\mu] = l^{-1}t^{-1}m.$$

Поступая, как выше, при установлении соотношения (5), найдем:

$$[p] = v^2\rho, \quad [\mu] = \sigma^{\frac{1}{2}} v\rho,$$

Поэтому два отношения

$$w^2 = \frac{v^2\rho}{p}, \qquad R = \frac{\sigma^{\frac{1}{2}} v\rho}{\mu}$$

представляют собою чистые числа. Значение первого выясняется, когда принимаем во внимание, что $\frac{p}{\rho}$ как раз представляет квадрат скорости звука в этой жидкости. Что касается R, то это есть так называемое *число Рейнольдса.*

Соотношение, выражающее r, можно поэтому представить в виде:

$$r = F\ (\sigma,\ v,\ \rho \,|\, k,\ \theta,\ w,\ R).$$

С другой стороны, r есть сила, а потому $[r] = lt^{-2}m$; вместе с тем вычисление, приводящее к общему соотношению (5), дает:

$$[r] = \sigma\rho v^2.$$

Таким образом окончательное выражение величины r будет иметь вид:

$$r = \sigma\rho v^2\Phi\,(k,\ \theta,\ w,\ R),$$

где Φ есть функция одних только указанных аргументов.

Мы, таким образом, обнаружили, что сопротивление, которое встречает пластина, пропорционально произведению из ее площади на плотность среды и на квадрат скорости движения; коэфициент же пропорциональности представляет собой функцию некоторых чистых чисел, значение которых мы выше выяснили. Ньютон дал для r выражение $c\sigma\rho v^2$, где c есть постоянная. Как уже сказано, это допущение представляет собой только грубое приближение; наш анализ обнаруживает, от каких элементов еще зависит коэфициент c.

14. Мир в миниатюре [1]. В теории относительности скорость света при отсутствии возмущающих влияний представляет собой универсальную постоянную, в широких пределах не зависящую от передвижения наблюдателя. Современные взгляды на состав электричества (электронная теория) ведут к тому, что электрический заряд не представляет собой чего-либо сплошного, а есть дискретная совокупность элементарных зарядов, которые называются электронами. С этой точки зрения, мерой электрического заряда можно считать число электронов, из которых он состоит; электрон рассматривается, таким образом, как единица меры. Какова бы ни была принятая система мер число электронов в заряде всегда должно оставаться одно и то же.

Если мы желаем построить модель вселенной, в которой сохранялась бы, как и в действительной вселенной, скорость света и для которой оставался бы в силе электронный критерий измерения электрических зарядов, мы должны будем выбрать такие единицы длины, времени и массы, при которых коэфициенты приведения для измерения скоростей и электрических зарядов будут

[1] Ср. *R. Tolman*, The principle of Similitode, „Physical Review", Vol. 3, 1914, стр. 244—255.

равны единице. Мы будем называть, как обыкновенно, λ, τ, μ коэфициентами приведения основных единиц. Так как $\lambda\tau^{-1}$ и (см. упражнение II) $\lambda^{\frac{3}{2}}\tau^{-1}\mu^{\frac{1}{2}}$ суть коэфициенты приведения скорости и электрического заряда, то должны иметь место равенства:

$$\lambda\tau^{-1}=1, \quad \lambda^{\frac{3}{2}}\tau^{-1}\mu^{\frac{1}{2}}=1.$$

Разрешая эти уравнения относительно r и μ, получим:

$$r=\lambda, \quad \mu=\lambda^{-1}.$$

Найдя, таким образом, коэфициенты приведения для времен и масс в модели, которую требуется построить, мы уже найдем легко коэфициент приведения всякой величины Q, размеры которого суть n_1, n_2, n_3; он равен:

$$\lambda^{n_1}\tau^{n_2}\mu^{n_3}=\lambda^{n_1+n_2-n_3}.$$

Таким образом мера q' величины Q, определяемая в действительном мире, будет связана с мерой q, обнаруживаемой на модели, которую мы могли бы назвать *миром в миниатюре*, соотношением:

$$q'=\lambda^{n_1+n_2-n_3}q.$$

Пример. Так как для силы $n_1=1$, $n_2=-2$, $n_3=1$, то

$$f'=\lambda^{-2}f;$$

для мощности $n_1=2$, $n_2=-3$, $n_3=1$, а потому

$$\pi'=\lambda^{-2}\pi.$$

15. Припомним, что при установлении механического подобия мы ввели в качестве необходимых предпосылок следующие две: гомологичные части сделаны из одного и того же материала, так что $\mu=\lambda^3$; ускорение силы тяжести остается неизменным; поэтому $\lambda r^{-1}=1$. Эти допущения, в общем, приняты для реализуемости подобия на поверхности земли. Но если вопрос рассматривается с теоретической точки зрения, то нет основания для такого рода предположений, касающихся веса и состояния вещества. По указанным причинам вместо допущения, что не меняется ускорение силы тяжести, принимается постоянство скорости света, а вместо гипотезы материального подобия — электронная точка зрения, согласно которой тела природы состоят из атомов, а эти последние из электронов. С этой точки зрения можно считать оправданным релятивистское атомистическое построение Тольмана: здесь оно, во всяком случае, приведено лишь в качестве примера глубоких соображений, которые могут быть построены на основе теории подобия.