Глава IX

ТРЕНИЕ И СТАТИКА ТОЧКИ

§ 1. Равновесие точки, опирающейся на поверхность

1. В п. 11 гл. VII мы видели, что для равновесия материальной точки необходимо и достаточно, чтобы равнодействующая всех сил, действующих на эту точку, т. е. всех *активных сил*, если речь идет о свободной точке, и *активных сил* и *реакций*, если речь идет о несвободной точке, была равна нулю.

В случае несвободной точки из условия равновесия, которое мы здесь привели, нельзя вывести какое-либо определенное заключение о поведении равнодействующей активных сил до тех пор, пока не удастся прямым путем определить, каким образом ведут себя реакции. Этого можно достичь лишь при условии, что в каждом случае действие связей исследуется опытным путем.

Наиболее простыми из возможных для точки связей являются следующие три:

а) точка вынуждена двигаться по некоторой кривой (одна степень свободы);

б) точка вынуждена двигаться по некоторой поверхности (две степени свободы);

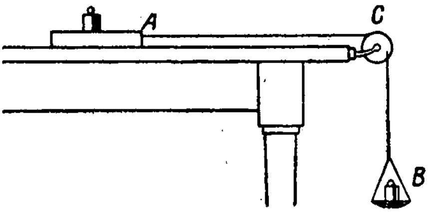
в) точка вынуждена оставаться по одну сторону от некоторой заданной поверхности (односторонняя связь — три степени свободы).

Рассмотрим теперь поведение реакций в этих различных случаях, начиная с третьего.

2. Точка на горизонтальной плоскости. Опыт Кулона. Рассмотрим прежде всего тяжелое тело, которое можно уподобить материальной точке P, опирающейся на твердую горизонтальную плоскость. Если на тело P не действует никакая другая прямо приложенная сила, кроме веса, то мы опытным путем устанавливаем, что оно остается в покое, т. е. находится в равновесии. Так как в этом случае тело подвергается только действию собственного веса и реакции поддерживающей его плоскости, то на основании условия равновесия мы заключаем, что реакция направлена прямо противоположно весу, т. е. действует по нормали к плоскости опоры.

Но это не всегда бывает так. Например, если мы попытаемся переместить тяжелое тело по плоскости и для этого приложим к нему некоторую силу, направленную горизонтально, то увидим, что при достаточно малой силе тело будет оставаться в равновесии, и только после того, как сила превзойдет некоторую величину, тело начнет двигаться. Наибольшая величина τ_0 горизонтальной силы, которая, будучи приложена к телу P, оставляет его неподвижным, называется *предельной силой* тяги; всякая сила, превосходящая τ_0 хотя бы на ничтожно малую величину, приведет тело P в движение.

Повседневный опыт учит, что предельная сила тяги зависит от веса тела P, от материала, из которого состоит тело, и от свойств поверхности опоры. Для того чтобы установить законы этой зависимости, Кулон [1]) произвел следующий опыт.



Фиг. 1.

Ящик без крышки, имеющий форму параллелепипеда, был помещен на горизонтальный стол, по которому ящик мог скользить. В точке A к ящику (фиг. 1) была привязана веревка, несущая на другом конце B чашку с гирями. Веревка проходила по желобку блока C, расположенного так, чтобы часть ее AC была горизонтальной. Мы уже имели случай говорить о том (гл. VII, п. 13), что в первом приближении можно принять, что веревка действует на ящик в точке A с горизонтальной силой, равной общему весу грузов и чашки. При таком устройстве можно по желанию изменять вес p тела, над которым производится опыт, и натяжение τ веревки.

Кулон производил такие опыты с ящиками и плоскостями опоры из различных материалов. Определяя предельные силы тяги, соответствующие различным весам, он пришел к следующим выводам.

Предельная сила тяги для тела, опирающегося на горизонтальную плоскость: 1) при прочих равных условиях пропорциональна весу тела; 2) зависит от физической природы поверхностей тела и плоскости опоры и не зависит от их формы и размеров.

Поэтому если p — вес тела, а τ_0 — соответствующая предельная сила тяги, то отношение τ_0/p не зависит ни от веса тела, ни от формы и размеров поверхностей соприкосновения. Оно зависит

[1]) Шарль Огюстен Кулон родился в Ангулеме в 1736 г., умер в Париже в 1806 г. После нескольких лет работы в качестве инженера вступил в Инженерный корпус, был членом Института Франции и в последние годы своей жизни генеральным инспектором Парижского университета. Кулону принадлежат важные исследования по трению и другим видам пассивных сопротивлений, а также по электромагнетизму. Достаточно напомнить, что знаменитые законы элементарных электростатических и магнитостатических действий носят его имя.

только от физической природы тяжелого тела и плоскости опоры и, в частности, от большей или меньшей гладкости и твердости поверхностей. Это отношение называется *коэффициентом трения* (относящимся к материалу тела и опоры) и обозначается обыкновенно через f (начальная буква слов „frottement" и „friction" — „трение"). Таким образом, между весом, предельной силой тяги и коэффициентом трения существует зависимость

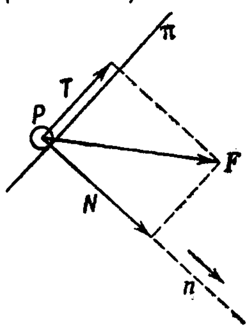
$$\tau_0 = fp.$$

Коэффициент трения всегда меньше 1; для шероховатых известняковых плит он может доходить до 0,75. Для дерева и для наиболее распространенных металлов при такой степени обработки их поверхностей, которая обычно достигается в машинах и приборах, коэффициент трения изменяется от 0,15 до 0,20. Он может уменьшиться даже до 0,07, если позаботиться о том, чтобы не было непосредственного сухого соприкосновения между поверхностями твердых тел. Это достигается применением смазки. Заметим, наконец, что коэффициент трения, как отношение между двумя силами, является отвлеченным числом, т. е. величиной безразмерной.

3. Точка, опирающаяся на плоскость. Из предыдущего пункта следует, что для равновесия материальной точки P, веса p, опирающейся на горизонтальную плоскость и находящейся под действием горизонтальной силы τ, необходимо и достаточно, чтобы τ не превосходила предельной силы тяги. Таким образом, обозначив через f коэффициент трения между материалами, из которых состоят точка и плоскость опоры, будем иметь

$$\tau \leqslant fp.$$

Это заключение приводит к постановке более общей задачи о равновесии точки, опирающейся на любую поверхность, через которую она не может пройти.



Фиг. 2.

Для того чтобы сделать следующий шаг в этом индуктивном обобщении, рассмотрим сначала точку P, опирающуюся вместо горизонтальной плоскости на *произвольно ориентированную* плоскость π (фиг. 2). Предположим, что в данный момент материальная точка P находится в соприкосновении с плоскостью под действием известных активных сил, равнодействующая которых (включающая и вес, если P — тяжелая точка) есть F. Обозначим через n внутреннюю нормаль к плоскости в точке P, т. е. перпендикуляр к π, направленный в ту сторону, куда связь не позволяет точке двигаться. Если равнодействующая активных сил направлена наружу, т. е. образует с внутренней нормалью n тупой угол, то будем иметь $F_n < 0$. В этом случае связь вследствие своей односторонней природы не в состоянии как-нибудь ограничить свободу точки, которая поэтому будет подчиняться действию силы $\boldsymbol{F}$, как если бы она была свободна. Отсюда как *необходимое* условие для равновесия точки P вытекает соотношение

$$F_n \geqslant 0. \tag{1}$$

Предполагая теперь, что это условие выполнено, рассмотрим, наряду с проекцией F_n силы $\boldsymbol{F}$ на внутреннюю нормаль n, ее составляющую $\boldsymbol{F}'$, параллельную плоскости π, и обозначим соответственно через N и T абсолютные значения F_n и $\boldsymbol{F}'$. Заметим, что при выполнении условия (1) F_n совпадает и по знаку с N. Тогда можно считать, что точка находится под действием двух активных сил: силы $\boldsymbol{F}_n$, направленной по внутренней нормали и имеющей величину N, и силы $\boldsymbol{F}'$, параллельной плоскости π и равной по величине T. Таким образом, за исключением того обстоятельства, что здесь плоскость опоры не горизонтальна, точка P находится в условиях, совершенно аналогичных тем, которые были рассмотрены выше, когда точка веса p опиралась на горизонтальную плоскость и находилась под действием силы тяги τ, параллельной плоскости опоры. Роли веса p и силы τ выполняются здесь соответственно силами, имеющими величины N и T. На основании того соображения, что результат действия силы не зависит от способа, которым она осуществляется, мы можем считать, что поведение точки P будет точно таким же, как если бы плоскость опоры была горизонтальной, а на точку P действовали только вес N и горизонтальная сила T. Обозначая через f коэффициент трения точки о плоскость, мы заключаем, что необходимым и достаточным условием для равновесия [в предположении, что выполняется соотношение (1)] будет

$$T \leqslant fN. \tag{2}$$

4. Точка, опирающаяся на любую поверхность. Теперь остается сделать еще один шаг и рассмотреть случай, когда тело, на которое опирается точка P, ограничено любой поверхностью σ. Какова бы ни была равнодействующая $\boldsymbol{F}$ активных сил, действующих на точку, опорная поверхность σ, ограничивающая свободу перемещения точки P, действует на точку только по небольшой площадке, которую можно отождествить с элементом касательной плоскости к σ в положении, занимаемом точкой P. Отсюда следует, что условия равновесия совпадают с теми, какие имели бы место, если бы эта касательная плоскость была изготовлена из того же самого материала, из которого состоит тело, ограниченное поверхностью σ. Другими словами, если f есть коэффициент трения точки P о поверхность σ, а N и T — соответственно абсолютные величины составляющих силы $\boldsymbol{F}$ по внутренней нормали и по касательной плоскости, то необходимые и достаточные условия равновесия выразятся соотношениями

$$F_n \geqslant 0, \tag{1}$$

$$T \leqslant fN. \tag{2}$$

В частности, равновесие будет иметь место также и при $T = fN$; в этом случае говорят, что имеется *предельное состояние равновесия*, так как, для того чтобы нарушить равновесие, достаточно самого незначительного увеличения касательной составляющей равнодействующей активных сил.

5. Угол и конус трения. Условиям (1) и (2) можно придать вид, более удобный для приложений. Рассматривая угол, составляемый равнодействующей активных сил с внутренней нормалью, будем иметь равенство (фиг. 3)

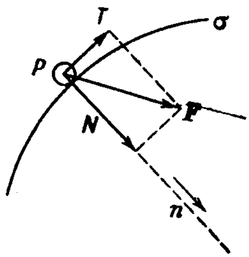
$$\operatorname{tg} \widehat{\boldsymbol{F}n} = \frac{T}{N},$$

выполняющееся как по величине, так и по знаку, так как речь идет не о тупом угле. Условие равновесия (2) можно поэтому написать в виде

$$\operatorname{tg} \widehat{\boldsymbol{F}n} \leqslant f$$

или, обозначая через φ угол (меньший $\pi/4$, потому что $f < 1$), тангенс которого есть f,

$$\widehat{\boldsymbol{F}n} \leqslant \varphi.$$



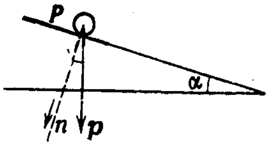
Фиг. 3.

Называя угол φ *углом трения*, а геометрическое место полупрямых, выходящих из P и образующих угол φ с внутренней нормалью, *внутренней полостью конуса трения*, заключаем, что *для равновесия материальной точки, опирающейся на поверхность, необходимо и достаточно, чтобы равнодействующая активных сил не лежала вне внутренней полости конуса трения.*

Таким образом, наибольшее отклонение равнодействующей активных сил от внутренней нормали, совместимое с равновесием, определяется углом трения; это наибольшее отклонение определяет предельные состояния равновесия.

Условия равновесия (1) и (2) накладывают ограничения на направление и сторону равнодействующей активных сил $\boldsymbol{F}$, а не на ее величину. Это, очевидно, может иметь место только в идеальном предположении, что связь обладает абсолютной твердостью и, не разрушаясь, может сопротивляться действию нормальных сил произвольно большой величины. Практически же условия (1) и (2) приложимы только до тех пор, пока величина N нормальной силы не превосходит предельного значения, при котором связь разрушается.

6. Понятие об угле трения оказывается особенно удобным при рассмотрении равновесия тяжелой точки на наклонной плоскости. Обозначая через α угол наклона плоскости к горизонту (фиг. 4), мы непосредственно видим, что условие равновесия сводится к следующему: *угол наклона α не должен превосходить угла трения φ.*



Фиг. 4.

7. Поверхности без трения. Коэффициент трения f, всегда меньший 1, будет тем меньше, чем более гладкими будут поверхности соприкосновения. Известно (п. 2), что, применяя смазку, можно уменьшить f до нескольких сотых долей единицы. Предельное предположение $f=0$ хотя и не может быть осуществлено практически, все же заслуживает того, чтобы рассмотреть его отдельно. При этом предположении можно получить (как в статике, так и в динамике, как мы увидим в свое время) некоторые общие, очень простые и убедительные теоретические результаты, которые не слишком сильно расходятся с действительными явлениями. Поэтому, по крайней мере в первом приближении, оно приложимо к этим явлениям, тогда как точный подход к ним был бы очень сложен. Если $f=0$, то говорят, что соприкосновение осуществляется *без трения* или также что поверхность σ *абсолютно гладкая.* Конус трения вырождается в нормаль, и соотношение (2) сводится к равенству

$$T=0. \tag{2'}$$

В этом случае для равновесия требуется, чтобы активная сила $\boldsymbol{F}$ была нормальной; далее, на основании соотношения (1), необходимо (и в то же время достаточно), чтобы эта нормальная сила была обращена внутрь тела, представляющего собой опору для точки P.

Так, например, для тяжелой точки, опирающейся на абсолютно гладкую поверхность, положениями равновесия будут только те положения, для которых внутренняя нормаль вертикальна и направлена вниз.

8. Реакция и трение. На основании условий (1) и (2) можно определить поведение реакции $\boldsymbol{R}$, которую развивает поверхность опоры σ в случае равновесия, когда на точку действуют активные силы, имеющие равнодействующую $\boldsymbol{F}$. Мы знаем, что при равновесии выполняется равенство

$$\boldsymbol{F}+\boldsymbol{R}=0, \quad \text{или} \quad \boldsymbol{R}=-\boldsymbol{F},$$

т. е. уравновешиваются отдельно нормальные и касательные составляющие сил $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{F}$ и, в частности, совпадают соответственно их величины.

Поэтому, принимая во внимание рассуждения предыдущих пунктов и называя *внешней полостью конуса трения* полость, противоположную относительно вершины внутренней полости, можно утверждать, что *реакция* $\boldsymbol{R}$, *с которой материальная поверхность* σ *действует на материальную точку* P, *находящуюся с ней в соприкосновении, зависит от равнодействующей* $\boldsymbol{F}$ *активных сил, действующих на точку* P. *В случае равновесия реакция* $\boldsymbol{R}$ *всегда направлена во внешнюю сторону поверхности* σ *и лежит внутри внешней полости конуса трения. Другими словами, ее составляющая по нормали к поверхности* σ *имеет величину* N, *равную величине нормальной составляющей силы* $\boldsymbol{F}$, *а составляющая в касательной плоскости к* σ *по величине не может превзойти* fN, *где* f *есть коэффициент трения между точкой и поверхностью.*

В идеальном случае абсолютно гладкой поверхности касательная составляющая реакции равна нулю, или, другими словами, полная реакция направлена по внешней нормали.

Касательная составляющая реакции $\boldsymbol{R}$ в случае равновесия называется *трением скольжения*, или *статическим трением* (в предельном случае, когда $T = fN$, также *предельной силой трения*), или просто *трением*, если нет основания смешать его с трением качения, о котором мы еще будем говорить (гл. XIII, § 6).

9. Одновременное действие многих односторонних связей. Принципы, установленные в предыдущих пунктах, позволяют исследовать условия равновесия материальной точки P, которая одновременно соприкасается с двумя или большим числом материальных поверхностей (представим себе, например, шарик, лежащий на полу и прислоненный к одной или двум стенам). Каждой точке соприкосновения соответствует одна реакция: в действительности речь идет о силах, приложенных к различным геометрическим точкам, но так как P рассматривается как материальная *точка*, эти различные точки приложения можно считать совпадающими.

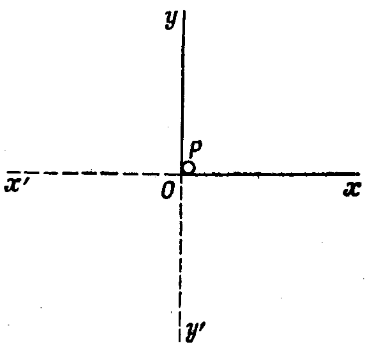
Для равновесия необходимо и достаточно, чтобы геометрическая сумма всех реакций была направлена прямо противоположно активной силе F.

Поэтому в каждом отдельном случае достаточно исследовать, возможно или невозможно, чтобы сумма *векторов* (*реакций*), лежащих во внешних полостях различных конусов трения, была равна $-\boldsymbol{F}$.

В данном случае оказывается существенным следующее замечание: для каждой отдельной поверхности σ, находящейся в соприкосновении с P, необходимо предварительно исследовать, положительна или отрицательна соответствующая проекция F_n на нормаль к σ, направленную внутрь. В первом случае действительно может возникнуть реакция (лежащая, конечно, во внешней полости конуса трения); во втором случае поверхность σ не в состоянии развить реакцию, и все будет происходить так, как если бы этой поверхности не существовало.

Отсюда следует, что *для равновесия необходимо, чтобы сумма реакций тех поверхностей, которые действительно способны развить реакции,* была равна $-\boldsymbol{F}$ (что будет происходить всякий раз, когда сила $\boldsymbol{F}$ будет составлять острый угол с внутренней нормалью).

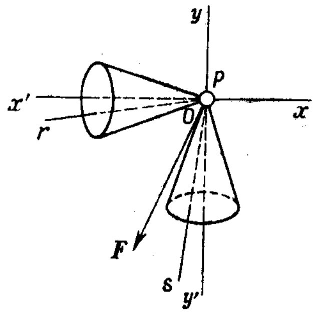
10. В качестве простого примера представим себе материальную точку P, которая не может проникнуть сквозь две взаимноперпендикулярные плоскости. Такими плоскостями являются, например, пол и вертикальная стена комнаты, представленные на фиг. 5 прямыми Ox, Oy пересечения их с плоскостью чертежа. Точка P может принимать любое положение внутри двугранного угла с нормальным сечением $\widehat{xOy}$ или на его гранях, но не может переходить через самые грани. При этом одновременное действие обеих связей может иметь место только тогда, когда точка P находится в соприкосновении с обеими плоскостями, так как иначе или не будет действовать ни одна из двух связей (если P не находится в соприкосновении ни с той, ни с другой плоскостью), или не будет действовать только одна (если P опирается только на одну плоскость). Предполагая поэтому точку P опирающейся на обе плоскости, например в O, подвергнем ее действию некоторой силы $\boldsymbol{F}$ (равнодействующей и поэтому включающей вес, если он должен быть принят во внимание), которую предположим действующей в плоскости xOy. Если сила $\boldsymbol{F}$ лежит внутри угла $\widehat{xOy}$, то ни одна из стенок не будет препятствовать движению точки P, которая будет подчиняться только действию силы $\boldsymbol{F}$, как если бы она была свободной.



Фиг. 5.

Поэтому равновесие будет невозможно (если только сила $\boldsymbol{F}$ не равна 0). Обозначим через Ox', Oy' продолжения осей Ox и Oy. Если сила $\boldsymbol{F}$ направлена внутрь угла $\widehat{xOy'}$ (или $\widehat{yOx'}$), то действует *только одна связь*, именно плоскость Ox (или соответственно Oy), и мы возвращаемся к случаю, рассмотренному в предыдущих пунктах. Если же сила $\boldsymbol{F}$ направлена внутрь угла $\widehat{x'Oy'}$, то действуют обе связи и *равновесие обеспечено при всех условиях*. Действительно, если мы разложим силу $\boldsymbol{F}$ на ее составляющие $\boldsymbol{F}_{x'}$, $\boldsymbol{F}_{y'}$, то, каковы бы ни были коэффициенты трения обеих плоскостей, силы $F_{x'}, F_{y'}$, как нормальные к этим плоскостям, будут уравновешены каждая соответствующей реакцией.

Заметим, что если обе плоскости *абсолютно гладкие*, то каждая из них способна развить реакцию только в направлении нормали (предыдущий пункт), поэтому реакции, действующие на точку P в рассмотренном выше случае, будут *однозначно определены* как силы, равные и прямо противоположные составляющим $F_{x'}$, $F_{y'}$ активной силы. Но если обе плоскости шероховатые (коэффициенты трения их могут быть различными) и если мы выберем в плоскости $Ox'y'$ (фиг. 6) два каких угодно направления r и s из точки O, *не внешних относительно конусов трения* обеих плоскостей, то силу F можно будет разложить по этим направлениям на составляющие F_r и F_s. При этом обе плоскости в состоянии развить реакции, прямо противоположные этим двум составляющим. Однако, *поскольку направления* r и s в обоих конусах трения выбраны произвольно, то ничего нельзя сказать о величине и направлении реакций, развиваемых двумя отдельно взятыми плоскостями; можно только утверждать, что их совместное действие должно обеспечить равновесие.



Фиг. 6.

11. Эта неопределенность реакций кажется парадоксальной для нашего представления о явлениях природы, согласно которому мы допускаем, что во всяком вполне определенном явлении каждое отдельное обстоятельство должно быть определено однозначно.

Мы сможем отдать себе отчет о причинах неудовлетворительности выводов, к которым мы пришли при рассмотрении разобранной частной задачи, если вспомним, что при формировании нашего теоретического представления о механических явлениях мы шли путем последовательной идеализации экспериментальных данных, пренебрегая теми обстоятельствами, сопутствующими изучаемому явлению, которыми, как нам казалось, можно пренебречь в первом приближении.

Так, в рассмотренном случае мы считали опорные поверхности *абсолютно твердыми и недеформируемыми*. Если бы мы приняли во внимание деформации (хотя бы они были и самыми незначительными), которые испытывают обе поверхности, будучи не абсолютно твердыми, под давлением материальной точки, то смогли бы определить обе реакции однозначно.