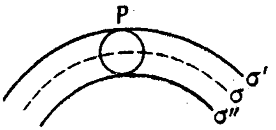
§ 3. Несвободная точка, вынужденная оставаться на поверхности или на кривой

14. Рассмотрим материальную точку P, вынужденную оставаться на заданной поверхности σ (двусторонняя связь). Физической моделью, в которой осуществляется такого рода связь, может служить маятник, прикрепленный к твердому стержню (весом которого можно пренебречь), подвешенному на сферическом шарнире. Ту же самую связь можно осуществить и другими способами, например посредством двух материальных поверхностей σ', σ'', находящихся в непосредственной близости к σ с той и другой стороны от нее (фиг. 8) и удерживающих точку P в промежутке между ними при наличии незначительного зазора между точкой и одной из поверхностей. Этим осуществляется геометрическая связь, выражающаяся в том, что точка не может покинуть поверхности σ.



Фиг. 8.

Мы легко придем к условиям равновесия для обоих этих случаев, руководствуясь принципом независимости, приведенным в п. 12. Таким образом, нашу двустороннюю связь можно рассматривать как осуществленную совместным действием двух односторонних связей, определяемых двумя материальными опорными поверхностями σ' и σ'', каждая из которых не позволяет точке P сойти с поверхности σ в одну из двух сторон. Из этих двух односторонних связей в действие вступает та или другая, в зависимости от того, в какую сторону относительно плоскости, касательной к σ в точке P, действует приложенная к P активная сила $\boldsymbol{F}$ (равнодействующая). Вводя также и в этом случае коэффициенты трения (которые мы будем считать одинаковыми для σ' и σ'') и называя *конусом трения* совокупность двух полостей конуса, относящихся к двум односторонним связям, образующим двустороннюю связь, мы можем высказать следующее заключение: *для того чтобы материальная точка, вынужденная оставаться на какой-нибудь поверхности, находилась в равновесии, необходимо и достаточно, чтобы действующая на нее сила не была внешней для конуса трения.*

В частности, *если поверхность абсолютно гладкая, то необходимо и достаточно, чтобы сила была направлена по нормали к поверхности* (в том или в другом направлении).

Таким образом, при равновесии реакция *однозначно определяется* как сила, прямо противоположная действующей силе.

15. Займемся, наконец, определением условий равновесия для точки, вынужденной оставаться на заданной кривой c.

Для этой цели воспользуемся еще раз постулатом о независимости (п. 12) и обратимся к случаю шарика, скользящего внутри трубки. Если связь осуществляется таким образом, то, какова бы ни была активная сила $\boldsymbol{F}$, шарик всегда будет опираться *только* на элемент поверхности (элементарную площадку) стенки трубки, так как между шариком и трубкой предполагается незначительный зазор, а, с другой стороны, *всякая* элементарная площадка стенки трубки при подходящих условиях действия силы может оказаться опорной площадкой. Поэтому все будет происходить так, как если бы точка могла удерживаться всеми поверхностями σ, проходящими через c, из которых в действие вступает та или другая, в зависимости от действующей силы.

Спроектируем теперь активную силу $\boldsymbol{F}$ на касательную к кривой c и на плоскость, нормальную к c, и обозначим через T и N абсолютные величины полученных таким образом составляющих, а через n — линию действия нормальной составляющей.

Из всех поверхностей, проходящих через c, выберем одну, для которой n является нормалью, и заметим, что если удовлетворяются условия равновесия для точки P в предположении, что она может двигаться только по этой поверхности, то тем более будут удовлетворяться условия равновесия для реального случая, в котором P может подвергаться действию других связей.

Отсюда следует, что если f есть некоторый коэффициент, который может зависеть от того, какая из поверхностей σ вступает в действие, то соотношение

$$T \leqslant fN$$

является *достаточным* условием для равновесия точки P.

Геометрическая интерпретация этого условия очевидна. Если, как обычно, φ есть угол трения ($\operatorname{tg}\varphi = f$), то условие $T \leqslant fN$ выражает, что при равновесии линия действия силы $\boldsymbol{F}$ должна составлять с касательной к кривой c угол, не меньший, чем $\pi/2 - \varphi$, т. е. должна лежать вне или на поверхности конуса Γ, ось которого совпадает с касательной, а половина угла при вершине равна дополнению угла трения до прямого угла (конуса прямых, проходящих через точку P и образующих с нормальной плоскостью к кривой угол φ).

16. Докажем обратное, ограничиваясь случаем, когда f имеет одно и то же значение для всех предполагаемых поверхностей, проходящих через кривую c.

Речь идет о том, чтобы доказать, что если точка P под действием активной силы $\boldsymbol{F}$ находится в равновесии на кривой, то выполняется соотношение

$$T \leqslant fN,$$

т. е. сила $\boldsymbol{F}$ лежит вне или на поверхности конуса Γ.

Действительно, обращаясь опять к шарику, скользящему в трубке, мы видим, что равновесие может существовать только благодаря тому, что шарик удерживается элементом площади стенки трубки.

Далее, если бы выполнялось неравенство $T > fN$, т. е. сила $\boldsymbol{F}$ была внутренней относительно конуса Г, она составляла бы с касательной угол, меньший угла $\pi/2 - \varphi$, и потому отклонялась бы больше чем на угол φ от нормальной плоскости. В этом случае ни одна из поверхностей, проходящих через c, не была бы в состоянии воспрепятствовать движению точки P, так как нормали ко всем таким поверхностям составляли бы с $\boldsymbol{F}$ углы, большие угла трения.

Мы приходим, таким образом, к следующему правилу: *Для равновесия материальной точки P, вынужденной оставаться на кривой, необходимо и достаточно, чтобы абсолютное значение T касательной составляющей активной силы не превосходило некоторой доли fN $(f < 1)$ от абсолютного значения N нормальной составляющей, или иначе, чтобы активная сила не была внутренней для некоторого кругового конуса, имеющего осью касательную.*

В случае связи без трения должно быть $T = 0$, т. е. сила должна быть нормальна к кривой.

§ 4. Статическое понятие об устойчивости равновесия

17. Обратимся опять к условиям равновесия точки, опирающейся на шероховатую поверхность:

$$F_n \geqslant 0, \tag{1}$$

$$T \leqslant fF_n. \tag{2}$$

На основании соотношения (2) разность $fF_n - T$, не отрицательная в статических условиях и равная нулю только в предельном состоянии равновесия, определяет наибольшую величину добавочной касательной силы, которая без нарушения равновесия может быть присоединена к первоначальной силе $\boldsymbol{F}$. Предположим, что $F_n > 0$. Отношение

$$\frac{fF_n - T}{F_n},$$

которое в силу условия (2) никогда не бывает отрицательным, определяет наибольшее значение добавочной касательной силы, отнесенной к единице нормальной составляющей активной силы, при котором еще возможно равновесие. Оно принимается за меру *устойчивости* рассматриваемого состояния равновесия и позволяет, очевидно, сравнивать случаи равновесия, соответствующие различным значениям F_n и f.

18. Для статических задач, отличных от только что рассмотренной (точка, опирающаяся на шероховатую поверхность), вообще