Действительно, обращаясь опять к шарику, скользящему в трубке, мы видим, что равновесие может существовать только благодаря тому, что шарик удерживается элементом площади стенки трубки.

Далее, если бы выполнялось неравенство $T > fN$, т. е. сила $\boldsymbol{F}$ была внутренней относительно конуса Г, она составляла бы с касательной угол, меньший угла $\pi/2 - \varphi$, и потому отклонялась бы больше чем на угол φ от нормальной плоскости. В этом случае ни одна из поверхностей, проходящих через c, не была бы в состоянии воспрепятствовать движению точки P, так как нормали ко всем таким поверхностям составляли бы с $\boldsymbol{F}$ углы, большие угла трения.

Мы приходим, таким образом, к следующему правилу: *Для равновесия материальной точки P, вынужденной оставаться на кривой, необходимо и достаточно, чтобы абсолютное значение T касательной составляющей активной силы не превосходило некоторой доли $fN (f < 1)$ от абсолютного значения N нормальной составляющей, или иначе, чтобы активная сила не была внутренней для некоторого кругового конуса, имеющего осью касательную.*

В случае связи без трения должно быть $T = 0$, т. е. сила должна быть нормальна к кривой.

§ 4. Статическое понятие об устойчивости равновесия

17. Обратимся опять к условиям равновесия точки, опирающейся на шероховатую поверхность:

$$F_n \geqslant 0, \tag{1}$$

$$T \leqslant fF_n. \tag{2}$$

На основании соотношения (2) разность $fF_n - T$, не отрицательная в статических условиях и равная нулю только в предельном состоянии равновесия, определяет наибольшую величину добавочной касательной силы, которая без нарушения равновесия может быть присоединена к первоначальной силе $\boldsymbol{F}$. Предположим, что $F_n > 0$. Отношение

$$\frac{fF_n - T}{F_n},$$

которое в силу условия (2) никогда не бывает отрицательным, определяет наибольшее значение добавочной касательной силы, отнесенной к единице нормальной составляющей активной силы, при котором еще возможно равновесие. Оно принимается за меру *устойчивости* рассматриваемого состояния равновесия и позволяет, очевидно, сравнивать случаи равновесия, соответствующие различным значениям F_n и f.

18. Для статических задач, отличных от только что рассмотренной (точка, опирающаяся на шероховатую поверхность), вообще говоря, еще не определено аналогичное *количественное* понятие устойчивости; однако всегда возможна качественная оценка, позволяющая разделять различные состояния равновесия на *устойчивые* и *неустойчивые*.

Основываясь на физической интуиции, мы будем называть состояние равновесия материальной точки (или системы материальных точек) *устойчивым*, если при любом, достаточно малом возмущении равновесия (смещение точки или системы из положения равновесия в какое-нибудь другое, достаточно близкое положение, совместимое со связями) силы, действующие на точку (или систему), *стремятся возвратить* ее в положение равновесия.

Выясним, какой смысл следует придавать этому стремлению сил возвратить точку (или систему) в положение равновесия. Для этой цели обратимся к понятию о работе и, как это вполне естественно, будем считать, что силы стремятся сообщить данное перемещение или препятствуют этому перемещению, в зависимости от того, будут ли эти силы в своей совокупности силами движущими (положительная работа) или силами сопротивления (отрицательная работа). Таким образом, для того чтобы различить, стремятся или нет некоторые силы сообщить точке (или системе) заданное перемещение, достаточно обратить внимание на знак полной работы, которую совершили бы силы на этом перемещении.

Отсюда вытекает следующее точное определение понятия об *устойчивости равновесия* (в статическом смысле) [1]).

Пусть P есть материальная точка (или одна из материальных точек, составляющих данную систему) и пусть $\boldsymbol{F}$ — сила, действующая на P в заданном положении равновесия M. Рассмотрим какое-нибудь перемещение, совместимое со связями, которое совершает точка P (или система) из положения равновесия M в некоторое близкое положение M'; пусть L есть полная работа сил, действующих на точку P (или на точки системы) при перемещении из M' в M. Если в достаточно малой окрестности положения равновесия работа L на всяком перемещении, совместимом со связями, оказывается положительной, то равновесие называется *устойчивым*.

Если существует хотя бы одно перемещение, для которого $L < 0$, то равновесие называется *неустойчивым*; если же $L = 0$ для любого перемещения, то равновесие называется *безразличным*. При $L \geqslant 0$ равновесие часто тоже называют *устойчивым*, хотя правильнее было бы называть его только *не неустойчивым*.

Эти определения предполагают, что сила $\boldsymbol{F}$ известна не только для данного положения равновесия M, но также и для всякого

---

[1]) В динамике мы увидим, как можно углубить учение об устойчивости равновесия, рассматривая движение, которое вызывают данные активные силы, когда равновесие будет (слегка) нарушено.

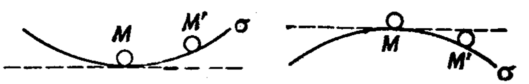
другого положения M', достаточно близкого к данному и совместимого со связями.

Как действует сила $\boldsymbol{F}$ вне рассматриваемого положения равновесия, можно судить по определению силы, если речь идет о позиционных силах; в других же случаях необходимо предварительно учесть особые обстоятельства, которые могут оказывать влияние на поведение силы.

19. Применим теперь результаты, полученные в предыдущих пунктах, к некоторым конкретным примерам, в которых речь будет итти о позиционных и, в частности, о консервативных силах, т. е. о таких силах, для оценки работы которых при переходе из любого положения M' в положение равновесия M нет необходимости указывать путь перехода.

а) *Тяжелая точка, удерживаемая на гладкой поверхности.* В положении равновесия M реакция поверхности σ должна быть равна и противоположна весу; следовательно, она направлена по вертикали. В то же время, так как трение исключается, реакция должна быть направлена по нормали к поверхности, т. е. перпендикулярно к касательной плоскости к σ в M.

Если предположим, что речь идет о выпуклой поверхности, то σ в окрестности M будет лежать целиком выше или целиком ниже упомянутой касательной плоскости (фиг. 9).



Фиг. 9.

Перемещения, подлежащие рассмотрению, очевидно, должны быть такими, которые допускаются связью, т. е. такими, в результате которых точка P переходит из положения равновесия M в другое положение M', постоянно оставаясь на поверхности σ. Реакция поверхности не будет при этом совершать работы, так как она всегда перпендикулярна к перемещению. Поэтому достаточно рассмотреть только работу силы тяжести. В первом случае оказывается, что всякая точка M' поверхности σ, *достаточно* близкая к M, будет находиться выше M. Отсюда следует, что на всяком перемещении $M'M$, совместимом со связями, активная сила (вес точки P) будет совершать существенно положительную работу и потому состояние равновесия будет устойчивым.

Во втором случае аналогичная работа будет отрицательной и равновесие, следовательно, будет неустойчивым.

Если поверхность опоры σ представляет собой горизонтальную плоскость, то работа силы тяжести будет равна нулю на всяком перемещении $M'M$, и потому мы будем иметь *безразличное* равновесие.

б) *Материальная точка, притягиваемая к грани куба силой, перпендикулярной к грани и возрастающей вместе с расстоянием.*

Если допустить, что для всякой пары противоположных граней закон притяжения является одним и тем же, то центр куба будет, очевидно, положением равновесия.

Далее легко видеть, что мы имеем здесь дело с *устойчивым равновесием*. Действительно, рассмотрим любое положение M' внутри куба. Так как притяжения возрастают вместе с расстоянием, то между силами, происходящими от любой пары противоположных граней, преобладать будет всегда та, которая относится к более удаленной грани.

Отсюда следует, что когда точка возвращается из M' в M, она следует в сторону большего притяжения и сумма работ сил притяжения к двум противоположным граням будет положительна. Вследствие этого и полная работа шести сил при переходе из любого положения к положению равновесия будет положительной.

в) *Свободная точка, находящаяся под действием каких угодно консервативных сил.*

Пусть $U(x, y, z)$ есть соответствующий потенциал, M — положение равновесия и M' — какое-нибудь другое близкое к M положение. Обозначим через U_M, $U_{M'}$ соответствующие значения, принимаемые функцией U в точках M и M'. Для того чтобы равновесие в точке M было устойчивым, требуется, чтобы, согласно нашему определению, работа, совершаемая силой при переходе точки из любого положения M' (достаточно близкого к M) в M, была положительной; требуется, следовательно, чтобы было

$$U_M - U_{M'} > 0$$

для всякой точки M', принадлежащей к некоторой окрестности точки M (и не совпадающей с M).

Это можно выразить так: *потенциал U должен иметь в положении M максимум.* Легко видеть, что, наоборот, если потенциал U имеет в точке M максимум, то этому положению соответствует состояние устойчивого равновесия.

Действительно, мы имеем в этом случае состояние равновесия, так как существование максимума, как известно из анализа, предполагает обращение в нуль первых производных $\partial U/\partial x$, $\partial U/\partial y$, $\partial U/\partial z$, т. е. проекций силы. Далее, равновесие будет устойчивым в силу неравенства $U_M - U_{M'} > 0$, определяющего максимум.

УПРАЖНЕНИЯ[1])

1. Принимая для f крайние значения, указанные в п. 2, найти пределы между которыми может изменяться угол трения φ (от 4° до 37° в круглых цифрах).

[1]) В этих упражнениях для краткости мы употребляем выражение: „сила, которая может сдвинуть“, вместо точного выражения: „сила, которая может привести точку в условия предельного равновесия“.