Если допустить, что для всякой пары противоположных граней закон притяжения является одним и тем же, то центр куба будет, очевидно, положением равновесия.

Далее легко видеть, что мы имеем здесь дело с *устойчивым равновесием*. Действительно, рассмотрим любое положение M' внутри куба. Так как притяжения возрастают вместе с расстоянием, то между силами, происходящими от любой пары противоположных граней, преобладать будет всегда та, которая относится к более удаленной грани.

Отсюда следует, что когда точка возвращается из M' в M, она следует в сторону большего притяжения и сумма работ сил притяжения к двум противоположным граням будет положительна. Вследствие этого и полная работа шести сил при переходе из любого положения к положению равновесия будет положительной.

в) *Свободная точка, находящаяся под действием каких угодно консервативных сил.*

Пусть $U(x, y, z)$ есть соответствующий потенциал, M — положение равновесия и M' — какое-нибудь другое близкое к M положение. Обозначим через U_M, $U_{M'}$ соответствующие значения, принимаемые функцией U в точках M и M'. Для того чтобы равновесие в точке M было устойчивым, требуется, чтобы, согласно нашему определению, работа, совершаемая силой при переходе точки из любого положения M' (достаточно близкого к M) в M, была положительной; требуется, следовательно, чтобы было

$$U_M - U_{M'} > 0$$

для всякой точки M', принадлежащей к некоторой окрестности точки M (и не совпадающей с M).

Это можно выразить так: *потенциал U должен иметь в положении M максимум*. Легко видеть, что, наоборот, если потенциал U имеет в точке M максимум, то этому положению соответствует состояние устойчивого равновесия.

Действительно, мы имеем в этом случае состояние равновесия, так как существование максимума, как известно из анализа, предполагает обращение в нуль первых производных $\partial U/\partial x$, $\partial U/\partial y$, $\partial U/\partial z$, т. е. проекций силы. Далее, равновесие будет устойчивым в силу неравенства $U_M - U_{M'} > 0$, определяющего максимум.

УПРАЖНЕНИЯ[1])

1. Принимая для f крайние значения, указанные в п. 2, найти пределы между которыми может изменяться угол трения φ (от 4° до 37° в круглых цифрах).

[1]) В этих упражнениях для краткости мы употребляем выражение: „сила, которая может сдвинуть“, вместо точного выражения: „сила, которая может привести точку в условия предельного равновесия“.

2. Тяжелое тело покоится на шероховатой горизонтальной плоскости. Угол трения равен φ. Доказать, что наименьшая сила, которая может сдвинуть тело, образует угол φ с плоскостью.

3. Тяжелое тело опирается на наклонную плоскость. Какова будет наименьшая сила τ_1, достаточная для того, чтобы сдвинуть тело вверх, в предположении, что сила действует по линии наибольшего наклона? Наоборот, какова будет наименьшая сила τ_2, направленная в противоположную сторону, под действием которой тело начнет опускаться?

Во втором случае, конечно, предполагается, что угол трения φ превосходит угол наклона α, так как в противном случае движение точки вниз началось бы без действия какой бы то ни было силы. [$\tau_1 = p\,(f\cos\alpha + \sin\alpha)$, $\tau_2 = p\,(f\cos\alpha - \sin\alpha)$, где p — вес тела, f — коэффициент трения.]

4. В дополнение к предыдущему упражнению определить величину и направление наименьшей добавочной силы, которая может сдвинуть тело. [Сила лежит в вертикальной плоскости, содержащей линию наибольшего наклона к горизонту, и направлена перпендикулярно к той образующей конуса трения, которая составляет наименьший угол с вертикалью; величина силы равна $p\sin(\varphi - \alpha)$.]

5. Тяжелое тело весом p опирается на наклонную плоскость (угол наклона α больше угла трения φ). Показать, что наименьшая горизонтальная сила, под действием которой тело может оставаться в равновесии, равна $p\sin(\alpha - \varphi)$.

6. Тяжелый шарик может двигаться внутри трубки, изогнутой по окружности и расположенной в вертикальной плоскости: коэффициент трения шарика о трубку есть f. Какова та часть трубки, внутри которой шарик может оставаться в равновесии?

7. Тело весом в 120 *кг* опирается на внутреннюю поверхность полой сферы. Оно находится в равновесии в некотором положении, смещенном на 20° от самой низкой точки (в том смысле, что радиус сферы, проходящий через положение равновесия, составляет с вертикалью угол в 20°). Коэффициент трения f равен 0,56. Вычислить наименьшее усилие τ, направленное к самой низкой точке, при помощи которого можно сдвинуть тело ($\tau = 20{,}43$ *кг*).

8. Иллюстрировать геометрически количественную меру устойчивости $(fF_n - T)/F_n$, указанную в п. 17. Достаточно для этого ввести угол ψ, который активная сила F составляет с нормалью n, и заметить, что предыдущее отношение принимает тогда чисто геометрический вид $\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\psi$.