определить массу тела как сумму масс отдельных материальных точек, на которые его можно представить себе разделенным по какому-нибудь закону.

Это новое определение, так как оно основывается на понятии массы материальной точки, сообщает понятию массы тела характер универсальности (или независимости от каких-либо соображений, относящихся к земному полю тяготения), который мы имели в случае одной материальной точки (гл. VII, п. 16).

§ 2. Плотность

4. Для того чтобы выразить аналитически закон распределения массы внутри тела, необходимо ввести понятие о *плотности*.

Тела физически однородные (вода, литое железо и т. п.) характеризуются тем свойством, что веса (измеренные в одном и том же месте) их частей пропорциональны соответствующим объемам. Следовательно, мы имеем пропорциональность (независимо от того, в каком месте на Земле мы находимся) между массами различных точек однородного тела и соответствующими объемами.

Поэтому, если мы обозначим через S объем любого однородного тела, через m его массу и через ΔS и Δm объем и массу какой-нибудь его части, то будем иметь

$$\frac{\Delta m}{\Delta S} = \frac{m}{S};$$

это отношение численно равно массе единицы объема рассматриваемого тела. Оно называется *плотностью* тела C. Обозначая плотность через μ, будем иметь

$$\mu = \frac{\Delta m}{\Delta S};$$

это равенство справедливо, каков бы ни был объем рассматриваемой части тела C. Поэтому, предположив, что рассматриваемая часть тела стягивается к точке, так что ее объем и масса стремятся к нулю, в пределе будем иметь

$$\mu = \frac{dm}{dS}. \tag{1}$$

Пользуясь языком анализа бесконечно малых, мы можем сказать, что μ есть отношение массы бесконечно малой частицы нашего тела к соответствующему объему. Из соотношения (1) имеем

$$dm = \mu\, dS, \tag{2}$$

так что массу m тела C можно представить в виде интеграла

$$\int\limits_S dm,$$

распространенного на всю область S пространства, занятую телом C. На основании равенства (2) этот интеграл не отличается от интеграла

$$\int\limits_S \mu\, dS$$

или от интеграла

$$\mu \int\limits_S dS = \mu S,$$

что согласуется с данным выше определением величины μ ($\mu = m/S$).

Эти естественные замечания подсказывают нам обобщение, которое в то же время соответствует нашей физической интуиции и духу анализа бесконечно малых. Мы можем представить себе, что тело C состоит не из однородной материи, а из смеси различных веществ; идеализируя, мы можем предположить, что материальная структура тела C изменяется от точки к точке непрерывно. Тогда отношение

$$\frac{\Delta m}{\Delta S} \tag{3}$$

массы некоторой частицы тела C к соответствующему объему (*средняя плотность* тела C в объеме ΔS) будет изменяться при изменении частицы. Предположим, что когда мы заставляем объем ΔS стремиться к нулю, стягивая его к одной из его точек P, отношение (3) стремится к определенному конечному пределу

$$\mu = \lim_{\Delta S \to P} \frac{\Delta m}{\Delta S}. \tag{4}$$

Этот предел называется *плотностью* тела в точке P; мы будем предполагать, что плотность μ представляет собой *конечную и, вообще говоря, непрерывную*[1]), *а поэтому, в частности, интегрируемую функцию от точек области S, занятой телом.*

Отправляясь от этой функции μ, мы получим массу m в виде интеграла от μ, распространенного на область S. Для этой цели достаточно принять во внимание, что равенство (4), обозначив через ε некоторую величину, стремящуюся к нулю вместе с ΔS, можно написать в виде

$$\frac{\Delta m}{\Delta S} = \mu + \varepsilon$$

или в виде

$$\Delta m = \mu\, \Delta S + \varepsilon\, \Delta S; \tag{5}$$

---

[1]) Этим мы хотим сказать, что может существовать лишь конечное число поверхностей, при переходе через которые функция испытывает разрывы.

отсюда следует, что

$$m = \sum (\mu \, \Delta S + \varepsilon \, \Delta S),$$

где сумма распространяется на весь объем S, занятый телом C. Так как это соотношение справедливо при любом разделении тела на части, то достаточно будет заставить стремиться к нулю по какому угодно закону объем ΔS каждой отдельной частицы, чтобы на основании известных соображений из анализа получить

$$m = \int\limits_S \mu(x, y, z) \, dS, \tag{6}$$

где dS означает элемент объема.

Элемент интеграла (6), распространенного на область трех измерений, можно представить на основании формулы (5) (по крайней мере, до бесконечно малых высшего порядка) в виде

$$dm = \mu(x, y, z) \, dS. \tag{7}$$

Этот *материальный элемент* (бесконечно малая масса, распределенная в бесконечно малом объеме) является чисто математическим понятием; но так как при изложении принципов механики материальной точки и при дальнейших выводах мы всегда отвлекаемся от абсолютной величины частицы, которую называем точкой, и считаем, что эти принципы и выводимые из них следствия справедливы для частиц сколь угодно малых размеров, то они могут считаться имеющими силу и в пределе, а следовательно, и для только что рассмотренных материальных элементов.

Заметим, что равенство (6) при постоянном μ (т. е. при μ, не зависящем от x, y, z) дает

$$m = \mu \int\limits_S dS = \mu S,$$

откуда мы снова можем найти выражение для плотности μ однородного тела, из которого исходили.

5. Материальные поверхности и линии. Рассмотрим, в частности, тело, одним измерением которого можно пренебречь, например пластинку или мембрану или стенки сосуда столь малой толщины (по сравнению с другими размерами), что занятое ими пространство можно приближенно определить посредством куска поверхности. Такое тело называется *материальной поверхностью*.

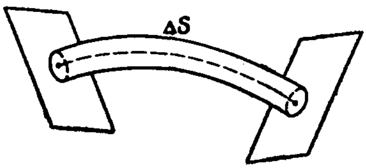
Аналогично, *материальной линией* называется тело, уподобляемое (в отношении занимаемого пространства) геометрической линии, например нить, тонкий стержень, тонкое кольцо (с таким отверстием, чтобы его нельзя было рассматривать как одну материальную точку).

Обозначим через S геометрический образ (поверхность или линию), соответствующий некоторой материальной поверхности или линии. Далее, введем условие, посредством которого всякому элементу ΔS поверхности или линии соответствует некоторый элемент ΔC тела. Самый простой и естественный способ установить такое соответствие заключается в следующем:

1) *В случае поверхности* элементу ΔS (фиг. 10) ставят в соответствие часть тела, заключенную внутри цилиндроида, который образован нормалями к поверхности S, восставленными из отдельных точек контура ΔS.

Когда поверхность S представляет собой плоскость, цилиндроид обращается в цилиндр, который всегда можно рассматривать, предполагая ΔS бесконечно малым.

Фиг. 10.



Фиг. 11.

2) *В случае линии* элементу ΔS (фиг. 11) ставят в соответствие часть тела, заключенную между двумя нормальными к S плоскостями, проведенными через концы ΔS.

Так как всем точкам пространства, занятого телом, могут быть поставлены в соответствие точки S, то, очевидно, тело можно рассматривать как совокупность материальных точек, размещенных на S. Разделив S на достаточно малые части ΔS, каждой из них ставят в соответствие материальную точку по только что установленным правилам.

6. Подобно тому как мы поступили в случае тел трех измерений, введем и здесь среднюю плотность m/S и локальную плотность

$$\lim \frac{\Delta m}{\Delta S},$$

предполагая, что элемент ΔS безгранично уменьшается, стремясь к определенной точке P из S.

Что касается существования этого предела и его аналитического выражения в функции от точек области S, то здесь сохраняют свое значение соображения, аналогичные соображениям п. 4.

В конечном счете достаточно сохранить формулы (6) и (7) с очевидной оговоркой, что хотя μ и продолжает обозначать (интегрируемую) функцию точек области S, однако ее физическая природа будет различной в зависимости от числа измерений области; в общем случае п. 4 μ будет отношением (или пределом отношения) массы к объему и, следовательно, будет иметь размерность $l^{-3}m$; в случае материальной поверхности речь идет об отношении массы к площади, имеющем размерность $l^{-2}m$; в случае материальной линии — об отношении массы к длине, имеющем размерность $l^{-1}m$.

Для избежания неясности эти три случая плотности различают, вводя названия: *кубическая* или *объемная плотность* (понятие, сохраняющее свое значение для какого угодно тела), *поверхностная плотность* (применяется в случае материальных поверхностей), *линейная плотность* (применяется в случае материальных линий).

7. Материальная поверхность называется *однородной*, когда ее поверхностная плотность постоянна. Заметим, что однородная материальная поверхность, рассматриваемая как тело трех измерений, т. е. имеющая постоянную объемную плотность, может не быть однородной в смысле поверхности, т. е. может иметь не постоянную поверхностную плотность. Достаточно представить себе пластинку или лист из однородного материала, но с изменяющейся от точки к точке толщиной; в этом случае поверхностная плотность изменяется пропорционально толщине.

То же самое справедливо и для материальной линии.

§ 3. Центр тяжести системы дискретных материальных точек

8. Пусть мы имеем систему S, состоящую из некоторого конечного числа материальных точек P_i с массами m_i $(i=1, 2, 3 \ldots)$, и рассматриваем силы веса $m_i g$, действующие на эти точки. Эти силы составляют систему параллельных и одинаково направленных векторов, которая имеет, как мы знаем (гл. I, п. 56), вполне определенный центр G. Если мы выберем в качестве начала координат произвольную точку O системы отсчета и обозначим через m полную массу $\sum m_i$ точек системы, то положение центра G параллельных сил определится векторным уравнением

$$\overrightarrow{OG}=\frac{\sum m_i \overrightarrow{OP_i}}{m}. \tag{8}$$

Точка G называется *центром тяжести* системы. Она зависит исключительно от конфигурации системы и от масс отдельных ее точек, а потому называется также *центром масс* системы.

Относительно любой системы координат с началом в O будем иметь

$$x_0=\frac{\sum m_i x_i}{m}, \quad y_0=\frac{\sum m_i y_i}{m}, \quad z_0=\frac{\sum m_i z_i}{m}, \tag{8'}$$