случае п. 4 μ будет отношением (или пределом отношения) массы к объему и, следовательно, будет иметь размерность $l^{-3}m$; в случае материальной поверхности речь идет об отношении массы к площади, имеющем размерность $l^{-2}m$; в случае материальной линии — об отношении массы к длине, имеющем размерность $l^{-1}m$.

Для избежания неясности эти три случая плотности различают, вводя названия: *кубическая или объемная плотность* (понятие, сохраняющее свое значение для какого угодно тела), *поверхностная плотность* (применяется в случае материальных поверхностей), *линейная плотность* (применяется в случае материальных линий).

7. Материальная поверхность называется *однородной*, когда ее поверхностная плотность постоянна. Заметим, что однородная материальная поверхность, рассматриваемая как тело трех измерений, т. е. имеющая постоянную объемную плотность, может не быть однородной в смысле поверхности, т. е. может иметь не постоянную поверхностную плотность. Достаточно представить себе пластинку или лист из однородного материала, но с изменяющейся от точки к точке толщиной; в этом случае поверхностная плотность изменяется пропорционально толщине.

То же самое справедливо и для материальной линии.

§ 3. Центр тяжести системы дискретных материальных точек

8. Пусть мы имеем систему S, состоящую из некоторого конечного числа материальных точек P_i с массами m_i ($i=1, 2, 3\ldots$), и рассматриваем силы веса $m_i g$, действующие на эти точки. Эти силы составляют систему параллельных и одинаково направленных векторов, которая имеет, как мы знаем (гл. I, п. 56), вполне определенный центр G. Если мы выберем в качестве начала координат произвольную точку O системы отсчета и обозначим через m полную массу $\sum m_i$ точек системы, то положение центра G параллельных сил определится векторным уравнением

$$\overrightarrow{OG}=\frac{\sum m_i\overrightarrow{OP_i}}{m}. \tag{8}$$

Точка G называется *центром тяжести* системы. Она зависит исключительно от конфигурации системы и от масс отдельных ее точек, а потому называется также *центром масс* системы.

Относительно любой системы координат с началом в O будем иметь

$$x_0=\frac{\sum m_i x_i}{m},\qquad y_0=\frac{\sum m_i y_i}{m},\qquad z_0=\frac{\sum m_i z_i}{m}, \tag{8'}$$

где:

x_i, y_i, z_i — координаты точек P_i системы;
x_0, y_0, z_0 — координаты центра тяжести G.

Отсюда видно, что если мы изменим массы всех точек системы в одном и том же отношении, то центр тяжести не изменится.

9. Из равенства (8) следует, что если все точки системы лежат в одной и той же плоскости или на одной и той же прямой, то то же самое будет иметь место и для их центра тяжести.

Действительно, если в случае точек, лежащих в одной плоскости, мы возьмем начало координат O в той же плоскости, то в ней же, очевидно, будут лежать и все векторы $\overrightarrow{OP_i}$, а, следовательно, в силу равенства (8) также и вектор $\overrightarrow{OG}$, т. е. центр тяжести G. В случае прямой достаточно подобным же образом взять точку O на прямой и применить формулу (8).

10. Статические моменты. Равенствам (8′) можно придать геометрическое истолкование, которое в некоторых приложениях имеет преимущество, так как оно не зависит от предварительного выбора системы координат.

Будем называть *статическим моментом некоторой материальной точки с массой m относительно какой-нибудь плоскости π* произведение m на расстояние точки от плоскости, со знаком плюс, если точка лежит в одном (произвольно выбранном) из двух полупространств, определяемых плоскостью π, и со знаком минус, если точка лежит в другом полупространстве.

Совмещая с плоскостью π одну из координатных плоскостей, например плоскость $z=0$, из третьего из равенств (8′) выводим, что *сумма статических моментов точек системы относительно любой плоскости π равна статическому моменту всей массы системы, в предположении, что эта масса сосредоточена в центре тяжести.*

Это и есть то геометрическое истолкование формул (8′), о котором говорилось выше; применяя его к трем координатным плоскостям, мы опять придем к формулам (8′).

Для материальных точек, лежащих в одной и той же плоскости, мы будем иметь аналогичное предложение, если определим тем же способом статический момент материальной точки относительно прямой.

11. Из определения центра тяжести вытекают некоторые важные свойства его. Докажем прежде всего одно из них, которое справедливо для центра всякой системы параллельных приложенных векторов, направленных в одну и ту же сторону (ср. гл. I, п. 56):

Центр тяжести системы материальных точек лежит внутри всякой выпуклой поверхности σ, заключающей все точки системы.

Достаточно показать, что относительно любой плоскости π, касательной к поверхности σ, центр тяжести G лежит с той же стороны от плоскости π, с которой находится σ, так как тогда он должен лежать в области, огибаемой различными касательными плоскостями, т. е. как раз должен быть внутри σ.

Для этого, выбрав любую касательную плоскость π, примем ее за координатную плоскость xy и направим ось z в ту сторону, где лежит σ. Координаты z отдельных точек P_i будут тогда положительными, а следовательно, будет положительной и координата $z = \sum_i m_i z_i / m$ центра тяжести.

Аналогичными рассуждениями можно доказать, что:

Центр тяжести системы материальных точек, лежащих в одной и той же плоскости, находится внутри выпуклой замкнутой линии, заключающей все точки системы.

Центр тяжести системы материальных точек, лежащих на одной и той же прямой, находится внутри отрезка, определяемого двумя крайними точками системы.

12. Распределительное свойство центра тяжести. Если система S материальных точек разделена на две части S' и S'' и m', m'' — полные массы систем S' и S'', а G', G'' — их центры тяжести, то центр тяжести G системы S совпадает с центром тяжести масс m', m'', в предположении, что они сосредоточены соответственно в G' и G''.

Действительно, если через P'_i и P''_j обозначим точки из S' и S'', через m'_i и m''_j — их массы, то относительно любой точки O будем иметь

$$\overrightarrow{OG'} = \frac{\sum m_i \overrightarrow{OP'_i}}{m'}, \qquad \overrightarrow{OG''} = \frac{\sum m''_j OP''_j}{m''}$$

и, следовательно,

$$m' \overrightarrow{OG'} + m'' \overrightarrow{OG''} = \sum m'_i \overrightarrow{OP'_i} + \sum m''_j \overrightarrow{OP''_j}.$$

Так как в суммы в правой части входят все точки данной системы, то заключаем на основании формулы (8), что

$$m' \overrightarrow{OG'} + m'' \overrightarrow{OG''} = m \overrightarrow{OG};$$

т. е. центр тяжести G системы совпадает с центром тяжести масс m', m'', помещенных соответственно в G', G''.

Теорема, очевидно, распространяется и на тот случай, когда система разделена более чем на две части.

13. Диаметральные плоскости и плоскости симметрии. Говорят, что система S материальных точек обладает *диаметральной плоскостью* π, сопряженной с некоторым заданным направлением r (не параллельным плоскости), когда всякой точке из S соответствует другая с равной массой, расположенная на прямой, параллельной r и проходящей через первую, на том же самом расстоянии от плоскости π и с противоположной стороны от нее.

Точки, которые таким образом соответствуют друг другу, называются *сопряженными*.

Диаметральная плоскость π называется, в частности, плоскостью симметрии, когда она перпендикулярна к сопряженному направлению r, так что сопряженные точки будут симметричными относительно плоскости π.

Так как центром тяжести двух точек с равными массами является их средняя точка, то всякая пара сопряженных точек имеет центр тяжести на диаметральной плоскости π. Воображая систему S разбитой на столько частей, сколько имеется пар сопряженных точек, и применяя распределительное свойство, выводим следующее заключение: *если система обладает диаметральной плоскостью или, в частности, плоскостью симметрии, то центр тяжести лежит в этой плоскости.*

Отсюда следует, что: 1) *если имеются две диаметральные плоскости, то центр тяжести лежит на прямой их пересечения*; 2) *если система допускает больше чем две диаметральные плоскости, то эти плоскости имеют, по крайней мере, одну общую точку, которая и является центром тяжести системы.*

В случае системы, все точки которой расположены в одной и той же плоскости, можно, очевидно, рассматривать *диаметральные прямые* (сопряженные с заданным направлением) или, в частности, оси симметрии; при этом будут справедливы выводы, аналогичные только что высказанным.

14. Теорема Лагранжа[1]). Будем называть *полярным моментом* инерции системы материальных точек относительно точки P сумму произведений масс m_i точек P_i системы на квадраты их расстояний от P, т. е. число

$$M_P = \sum_i m_i PP_i^2.$$

Исходя из этого определения, докажем теорему: *центр тяжести любой системы можно определить как такую точку пространства, для которой полярный момент будет наименьшим.*

[1]) Жозеф Луи Лагранж родился в Турине в 1736 г., умер в Париже в 1813 г., широко известен как автор Аналитической механики. Он дал систематическое изложение аналитической механики, показав, как можно все частные теоремы о равновесии, как известные, так и доказанные им самим,

Действительно, принимая во внимание тождество

$$PP_i^2 = \overrightarrow{PP}_i^2, \qquad \overrightarrow{PP}_i = \overrightarrow{PG} + \overrightarrow{GP}_i,$$

мы можем написать

$$M_P = \sum m_i\, GP_i^2 + PG^2 \sum m_i + 2\overrightarrow{PG} \cdot \sum m_i\, \overrightarrow{GP}_i. \tag{9}$$

Но в последнем члене правой части множитель

$$\sum m_i\, \overrightarrow{GP}_i$$

равен тождественно нулю, как это видно из равенства (8), если предположить, что начало координат O совпадает с центром тяжести G; поэтому равенство (9), в котором первый член в правой части является не чем иным, как полярным моментом M_G системы относительно точки G, можно написать в виде

$$M_P = M_G + m\, PG^2.$$

Отсюда непосредственно следует, что центр тяжести G есть точка, для которой полярный момент инерции достигает минимума; действительно, для всякой другой точки P этот момент будет больше, чем M_G, на существенно положительную величину mPG^2, которая обращается в нуль только тогда, когда P совпадает с G.

§ 4. Центр тяжести тела, материальной поверхности и материальной линии

15. Для того чтобы определить центр тяжести какого-нибудь тела C, представим себе, что оно разложено как-либо на части ΔC, которые можно считать материальными точками, и рассмотрим центр тяжести G' этих материальных точек, составляющих тело C. При изменении разбиения C на части изменяет, вообще говоря, свое

вывести из одного общего принципа, называемого принципом виртуальных скоростей или принципом виртуальных работ. „Mécanique analytique“ была напечатана в первый раз в Париже в 1788 г.

Помимо вариационного исчисления, которое было одним из первых открытий Лагранжа, надо отметить его исследования, ставшие классическими, по теории чисел и теории алгебраических уравнений, по теории обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений с частными производными, по небесной механике (в частности, по задаче трех тел и по теории возмущений) и по гидродинамике.

Девятнадцати лет он получил звание профессора математики в Артиллерийской школе в Турине; немного позже был одним из основателей Туринской Академии наук. В 1766 г. был приглашен в Берлинскую Академию наук, где, после Эйлера, руководил математической секцией. В 1787 г. был приглашен в Париж. В течение революции и в последующий, наполеоновский, период он был советником французского правительства и сенатором. Преподавал в Высшей нормальной школе и в Политехнической школе, где им были написаны руководства по теории функций и по элементарной математике.