Действительно, принимая во внимание тождество

$$PP_i^2 = \overrightarrow{PP}_i^2, \qquad \overrightarrow{PP}_i = \overrightarrow{PG} + \overrightarrow{GP}_i,$$

мы можем написать

$$M_P = \sum m_i GP_i^2 + PG^2 \sum m_i + 2\overrightarrow{PG} \cdot \sum m_i \overrightarrow{GP}_i. \qquad (9)$$

Но в последнем члене правой части множитель

$$\sum m_i \overrightarrow{GP}_i$$

равен тождественно нулю, как это видно из равенства (8), если предположить, что начало координат O совпадает с центром тяжести G; поэтому равенство (9), в котором первый член в правой части является не чем иным, как полярным моментом M_G системы относительно точки G, можно написать в виде

$$M_P = M_G + m\,PG^2.$$

Отсюда непосредственно следует, что центр тяжести G есть точка, для которой полярный момент инерции достигает минимума; действительно, для всякой другой точки P этот момент будет больше, чем M_G, на существенно положительную величину mPG^2, которая обращается в нуль только тогда, когда P совпадает с G.

§ 4. Центр тяжести тела, материальной поверхности и материальной линии

15. Для того чтобы определить центр тяжести какого-нибудь тела C, представим себе, что оно разложено как-либо на части ΔC, которые можно считать материальными точками, и рассмотрим центр тяжести G' этих материальных точек, составляющих тело C. При изменении разбиения C на части изменяет, вообще говоря, свое

вывести из одного общего принципа, называемого принципом виртуальных скоростей или принципом виртуальных работ. „Mécanique analytique" была напечатана в первый раз в Париже в 1788 г.

Помимо вариационного исчисления, которое было одним из первых открытий Лагранжа, надо отметить его исследования, ставшие классическими, по теории чисел и теории алгебраических уравнений, по теории обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений с частными производными, по небесной механике (в частности, по задаче трех тел и по теории возмущений) и по гидродинамике.

Девятнадцати лет он получил звание профессора математики в Артиллерийской школе в Турине; немного позже был одним из основателей Туринской Академии наук. В 1766 г. был приглашен в Берлинскую Академию наук, где, после Эйлера, руководил математической секцией. В 1787 г. был приглашен в Париж. В течение революции и в последующий, наполеоновский, период он был советником французского правительства и сенатором. Преподавал в Высшей нормальной школе и в Политехнической школе, где им были написаны руководства по теории функций и по элементарной математике.

положение также и этот центр тяжести G'; но, как мы сейчас покажем, точка G', при одновременном стремлении к нулю объемов всех отдельных частей тела C, всегда стремится к вполне определенному предельному положению G, не зависящему от закона, по которому заставляют стремиться к нулю объемы отдельных частиц. Когда это будет доказано, тогда будет оправдано и название определенной таким образом точки G центром тяжести тела.

Чтобы доказать существование и единственность точки G, вспомним, что если $\mu(x, y, z)$ есть плотность (объемная, локальная) тела C, то масса Δm любой частицы ΔC из C при каком угодно разбиении определяется (п. 4) равенством

$$\Delta m = \mu \Delta S + \varepsilon \Delta S,$$

где μ подразумевается вычисленной для одной из точек объема ΔS частицы ΔC, а ε стремится к нулю вместе с ΔS; если обозначим через m полную массу тела C, то центр тяжести G' системы материальных точек ΔC, составляющих тело C, относительно начала координат O определится векторным уравнением

$$m\,\overrightarrow{OG'} = \sum \overrightarrow{OP}\,\mu\,\Delta S + \sum \overrightarrow{OP}\,\varepsilon\,\Delta S. \tag{10}$$

Далее, представим себе, что разбиение тела C изменяется таким образом, что объем ΔS всякой отдельной его частицы стремится к нулю. Так как по предположению (п. 4) функция $\mu(x, y, z)$ интегрируема и, следовательно, таковыми же будут функции $x\mu$, $y\mu$, $z\mu$ и вектор $\mu\overrightarrow{OP}$, то первая сумма в правой части равенства (10) стремится к интегралу

$$\int \overrightarrow{OP}\,\mu\,dS,$$

распространенному на объем S тела C. С другой стороны, вследствие известных из анализа рассуждений вторая сумма, в которой ε бесконечно мало вместе с ΔS, стремится к нулю, каков бы ни был закон, по которому стремятся к нулю объемы отдельных частиц тела C; поэтому заключаем, что G' всегда имеет в качестве предельного положения точку G, определяемую векторным равенством

$$m\,\overrightarrow{OG} = \int_S \overrightarrow{OP}\,\mu\,dS,$$

которое, если примем во внимание равенство (6) из п. 4, можно написать в виде

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\int\limits_S \overrightarrow{OP}\,\mu\,dS}{\int\limits_S \mu\,dS} \tag{11}$$

Если мы спроектируем это равенство на оси координат, то для координат x_0, y_0, z_0 точки G получим выражения

$$x_0=\frac{\int\limits_S x\mu\,dS}{\int\limits_S \mu\,dS},\quad y_0=\frac{\int\limits_S y\mu\,dS}{\int\limits_S \mu\,dS},\quad z_0=\frac{\int\limits_S z\mu\,dS}{\int\limits_S \mu\,dS}. \tag{11'}$$

Этими формулами определяется центр тяжести какого угодно тела. Очевидно, что предыдущие рассуждения и окончательные формулы (11), (11′) сохраняют свое значение также и для какой угодно материальной поверхности или материальной линии; при этом вместо объемной плотности подставляется поверхностная или линейная плотность, а в качестве области интегрирования берется вместо объема поверхность или линия. Полученный результат можно выразить так: *в случае непрерывной системы материальных точек центр тяжести всегда можно определить векторным равенством* (8) *п.* 8, *для этого достаточно вместо массы частицы подставить элементарную массу* (т. е. произведение локальной плотности на соответствующий элемент объема), *а вместо суммы — интеграл.*

Отметим, наконец, что для однородной системы ($\mu=\text{const}$) равенства (11) и (11′) принимают вид

$$\overrightarrow{OG}=\frac{\int\limits_S \overrightarrow{OP}dS}{S}, \tag{12}$$

$$x_0=\frac{\int\limits_S x\,dS}{S},\quad y_0=\frac{\int\limits_S y\,dS}{S},\quad z_0=\frac{\int\limits_S z\,dS}{S}. \tag{12'}$$

Положение центра тяжести зависит в этом случае исключительно от геометрической формы области интегрирования. Поэтому можно говорить о центре тяжести тела, поверхности, линии как о геометрической точке, определяемой равенством (12) или (12′); однако эта точка представляет интерес лишь благодаря механическому смыслу, вытекающему из того, что область S предполагается заполненной равномерно распределенной материей.

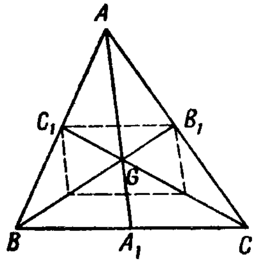
16. Определение центра тяжести некоторых фигур. У фигур, имеющих центр (точка пересечения трех несовпадающих диаметральных плоскостей, если речь идет об объеме, и двух диаметральных прямых, если речь идет о плоской фигуре), центр тяжести совпадает с центром фигуры (п. 13).

У параллелепипеда плоскости, проходящие через середины параллельных ребер, будут, очевидно, диаметральными плоскостями, сопряженными с направлениями соответствующих ребер; отсюда легко вывести, что центр тяжести параллелепипеда совпадает с точкой пересечения этих или диагональных плоскостей; центр тяжести параллелограмма совпадает с точкой пересечения его диагоналей, а для эллипсоида или эллипса — с соответствующим центром, и т. д.

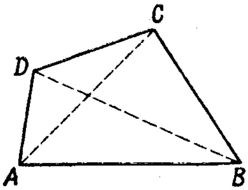
Очевидно, что центром тяжести отрезка является его середина.

а) *Треугольник.* Каждая медиана есть диаметральная линия, сопряженная с направлением стороны, которую она делит пополам. Точка встречи медиан есть поэтому центр фигуры и центр тяжести ее.

Простые рассуждения из элементарной геометрии показывают (фиг. 12), что на каждой медиане центр тяжести находится на



Фиг. 12.



Фиг. 13.

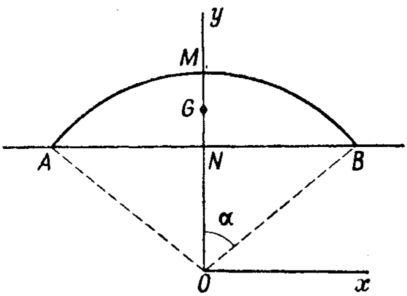
расстоянии одной трети ее от основания. Можно также сказать, выбрав одну сторону как основание, что центр тяжести находится на соответствующей медиане на расстоянии одной трети ее от основания.

б) *Четырехугольники и многоугольники.* Пусть задан простой, т. е. выпуклый, четырехугольник $ABCD$ (фиг. 13). Диагонали AC, BD разбивают его каждая на два треугольника ABC, ADC и BAD, BCD.

На основании предыдущего мы можем указать центры тяжести G', G'', G_1', G_1'' каждого из этих треугольников. В силу распределительного свойства (п. 12) центр тяжести G четырехугольника является также и центром тяжести двух точек G', G'', если каждой из них приписывается надлежащая масса (масса соответствующего треугольника). Отсюда следует, что G лежит на отрезке $G'G''$. По той же причине G лежит на отрезке $G_1'G_1''$, так что центр тяжести четырехугольника совпадает с точкой пересечения отрезков $G'G''$ с $G_1'G_1''$.

Для многоугольника с n сторонами можно применить способ последовательного приведения к многоугольникам с меньшим числом сторон и, следовательно, в конечном счете к треугольникам. Достаточно, например, разложить его двумя способами на многоугольник с $n-1$ сторонами и треугольник. Обозначив через G', G_1' центры тяжести двух многоугольников, через G'', G_1'' центры тяжести соответственных треугольников (соответственных в том смысле, что они дополняют указанные многоугольники), мы, как и выше, будем иметь центр тяжести G в точке пересечения отрезков $G'G''$ и $G_1'G_1''$.

в) *Дуга окружности.* Пусть $\smile{AB}$ есть дуга (фиг. 14), O — центр окружности, M — средняя точка дуги. Прямая OM, очевидно, является осью симметрии, так что центр тяжести G следует искать на ней. Обозначив через N точку пересечения OM с хордой AB, можно добавить, что центр тяжести должен лежать на отрезке MN.



Фиг. 14.

Действительно, G есть также и центр тяжести всех точек, лежащих на отрезке MN (частичные центры тяжести пар симметричных точек); поэтому он будет внутренней или по крайней мере не внешней точкой для этого отрезка (п. 11).

Для того чтобы определить положение точки G на MN, обратимся к формулам, выбрав в качестве начала координат точку O и приняв ось симметрии OM за ось y. Вторая из формул (12′) определит тогда координату y_0, которая в настоящем случае есть OG, в виде

$$OG = \frac{\int\limits_S y\,dS}{S},$$

где областью интегрирования S является дуга $\smile{AB}$. Интеграл, стоящий в числителе, определяется просто, если примем за переменную интегрирования угол θ, образуемый переменным радиусом OP с осью Oy и отсчитываемый в направлении от Oy к Ox.

Если 2α есть центральный угол, соответствующий дуге $\smile{AB}$, т. е. угол $\widehat{AOB}$, то для точек P дуги $\smile{AB}$ угол θ будет изменяться от $-\alpha$ до $+\alpha$. Обозначив через r радиус, очевидно, будем иметь

$$y = r\cos\theta, \qquad dS = r\,d\theta.$$

Искомый интеграл принимает, таким образом, вид

$$\int\limits_{-\alpha}^{\alpha} r^2 \cos\theta\, d\theta,$$

где r является постоянной величиной; легко видеть, что этот интеграл равен $2r^2 \sin\alpha$. Так как $2r\sin\alpha$ есть длина хорды AB, то окончательно будем иметь равенство

$$OG = r\frac{AB}{S},$$

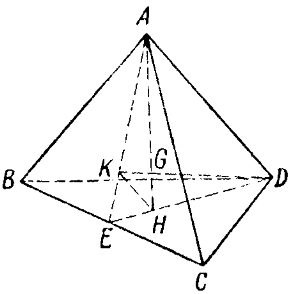
из которого видно, что *расстояние OG центра тяжести дуги от центра окружности* относится к радиусу, как хорда к дуге.

Для частного случая $\alpha = \pi$ (полуокружность) $AB = 2r$, $S = \pi r$, и мы будем иметь

$$OG = \frac{2}{\pi} r.$$

г) *Призма и цилиндр.* Рассмотрим сечения, параллельные основанию; все они равны между собой. Центры тяжести этих сечений являются их соответственными точками и все лежат на одной и той же прямой g, параллельной ребрам (или, соответственно, образующей).

Центр тяжести G тела есть средняя точка отрезка этой прямой g, отсекаемого на ней основаниями. Можно также сказать, что центр тяжести тела совпадает с центром тяжести сечения, проведенного через середину высоты.



Фиг. 15.

Для подтверждения этого достаточно представить себе призму (или цилиндр) разделенной на бесконечно тонкие слои посредством равноотстоящих, параллельных основанию плоскостей. Каждый слой можно уподобить однородной материальной площадке, которая имеет свой центр тяжести G' на прямой g. В силу распределительного свойства точка G есть центр тяжести всех точек G', если приписать им массы соответствующих слоев. Но все эти массы равны между собой. Поэтому точки G' составляют однородный отрезок, центр тяжести которого совпадает с его серединой.

д) *Тетраэдр.* Будем называть плоскостями-медианами плоскости, определяемые ребром и средней точкой противоположного ребра. Всякий тетраэдр имеет, очевидно, шесть плоскостей-медиан.

Эти плоскости, как мы скоро увидим, являются диаметральными плоскостями, сопряженными с направлением того ребра, которое они делят пополам, и не проходят все через одну и ту же прямую (так как из этого следовало бы, что четыре вершины тетраэдра лежат на одной и той же прямой); вследствие этого они определяют центр тяжести G как их общую точку пересечения (п. 13).

Через каждую вершину, например через A (фиг. 15), проходят три плоскости-медианы. Они пересекают противоположную грань BCD по трем медианам, поэтому все содержат центр тяжести H треугольника BCD и, следовательно, прямую AH. Мы можем, таким образом, определить центр тяжести G тетраэдра как точку пересечения отрезков, соединяющих каждую вершину с центром тяжести противоположной грани.

Важно отметить, что центр тяжести делит эти отрезки в отношении $1:3$. Для доказательства обозначим через E среднюю точку ребра BC и проведем медианы DE и AE треугольников BCD и ABC. Центры тяжести H, K этих треугольников находятся на соответствующих медианах DE и AE на расстояниях, равных одной трети каждой медианы от основания E, т. е. EH и EK равны соответственно третьей части от ED и EA. Отсюда следует, что два треугольника EHK и EDA подобны, так как они имеют один и тот же угол, заключенный между пропорциональными сторонами. Поэтому HK составляет одну треть от AD. Соединив H и K с противоположными вершинами A и D отрезками HA и KD, мы увидим, что точка пересечения G этих отрезков есть как раз центр тяжести тетраэдра. Из подобия треугольников GHK и GAD следует, что GH и GK равны соответственно одной трети от GA и GD.

Приняв любую грань тетраэдра за основание, можно сформулировать следующую теорему: *центр тяжести тетраэдра совпадает с центром тяжести сечения, параллельного основанию и проведенного на расстоянии одной четверти высоты от основания.*

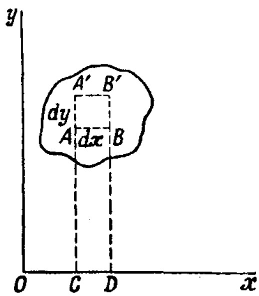
Действительно, точка G принадлежит такому сечению, как это видно из предыдущего, а отсюда следует, что она есть центр тяжести сечения, потому что лежит на трех плоскостях-медианах, проходящих через вершину A тетраэдра, которые пересекают по медианам каждое сечение, параллельное основанию.

е) *Пирамида.* Центр тяжести пирамиды (и, как предельный случай, конуса) лежит на отрезке, представляющем собой геометрическое место центров тяжести сечений, параллельных основанию, и делит этот отрезок (считая от вершины) в отношении $3:1$. Можно также сказать, что он совпадает с центром тяжести сечения, параллельного основанию и проведенного на расстоянии одной четверти высоты от основания.

Доказательство очень просто. Представим себе основание пирамиды разделенным на треугольники T', T'', ..., и пусть S', S'', ... будут соответствующие им тетраэдры, т. е. тетраэдры, имеющие основаниями эти треугольники и общей вершиной — вершину пирамиды.

Рассмотрим еще сечение σ, проведенное на расстоянии одной четверти высоты от основания. Оно пересекает тетраэдры S', S'', ... по треугольникам T'_1, T''_1, ..., подобным треугольникам T', T'', ... (соответственные стороны относятся друг к другу, как 3 к 4, и, следовательно, площади, как 9 к 16). Обозначая через G', G'', ... центры тяжести тетраэдров S', S'', ..., мы можем утверждать на основании предыдущего, что они совпадают с центрами тяжести треугольников T_1', T_1'', ... С другой стороны, в силу распределительного свойства (п. 12) центр тяжести G пирамиды можно рассматривать как центр тяжести точек G', G'', ..., массы которых равны соответственно массам тетраэдров S', S'', ... Эти массы пропорциональны объемам, а так как речь идет о тетраэдрах с одной и той же высотой, то они пропорциональны площадям их оснований T', T'', ..., или, наконец, площадям треугольников T_1', T_1'', ... Центр тяжести сечения σ, проведенного на расстоянии одной четверти высоты от основания, также совпадает, вследствие распределительного свойства, с центром тяжести точек G', G'', ... (центров тяжести треугольников T_1', T_1'', ..., составляющих вместе сечение σ), если представить себе, что в этих точках сосредоточены массы треугольников. Так как общий множитель пропорциональности, если на него умножить массы точек системы, не изменит координат центра тяжести (п. 8), то таким образом доказано, что центр тяжести G пирамиды совпадает с центром тяжести этого сечения σ.

17. Теорема Гюльдена [1]). *Объем тела, образованного вращением какой-нибудь плоской фигуры вокруг оси, расположенной в плоскости фигуры и не пересекающей ее, равен произведению площади фигуры на длину дуги окружности, описанной ее центром тяжести.*



Фиг. 16.

Пусть σ есть площадь фигуры; примем ось вращения за ось Ox (фиг. 16) и предположим, что плоскость xOy фигуры поворачивается на некоторый угол α. Найдем, каков будет объем V тела, образованного при таком вращении. Очевидно, что мы можем сначала вычислить объем, образованный вращением элементарной площадки $dx\,dy$, и затем проинтегрировать полученное выражение по всей площади σ. Объем, образованный вращением прямоугольника $dx\,dy$, можно рассматривать как разность между объемом, образованным вращением фигуры $A'B'DC$, и объемом, образованным вращением фигуры $ABDC$; каждый из них равен произведению $\alpha/2\pi$ на объем соответствующего цилиндра. Обозначив через x, y координаты точки A, для первого из этих объемов будем иметь

$$\frac{\alpha}{2\pi}\cdot\pi A'C^2\cdot CD=\frac{\alpha}{2}(y+dy)^2\,dx,$$

[1]) Павел Гюльден родился в кантоне Сен-Галлс в 1577 г., умер в Граце в 1643 г. Был иезуитом и долго жил в Риме, затем преподавал в университетах Вены и Граца.

а для второго $\frac{\alpha}{2} y^2\, dx$; отсюда (пренебрегая бесконечно малыми третьего порядка, не влияющими на величину двойного интеграла) следует, что объем, образованный вращением площадки $dx\,dy$, равен $\alpha y\, dx\, dy$ и, следовательно,

$$V = \alpha \int_\sigma y\, dx\, dy.$$

Введем теперь центр тяжести G площади σ. Для координаты y_0 уравнение (12′) дает

$$y_0 = \frac{\int_\sigma y\, dx\, dy}{\sigma},$$

а отсюда следует равенство

$$V = \sigma \alpha y_0,$$

которое и доказывает теорему Гюльдена, так как αy_0 есть не что иное, как дуга, описанная центром тяжести G фигуры σ при повороте на угол α.

§ 5. Моменты инерции

18. Определения. Пусть P — материальная точка с массой m, r — какая-либо прямая, δ — расстояние точки P от r.

Моментом инерции точки P относительно оси r называется произведение $m\delta^2$ массы точки на квадрат ее расстояния от оси.

Моментом инерции системы S, состоящей из конечного числа материальных точек P_i $(i = 1, 2, \ldots,)$, относительно оси r называется сумма моментов инерции отдельных ее точек.

Обозначив через I момент инерции системы, через m_i массу i-й ее точки P_i, через δ_i расстояние точки P_i от оси r, согласно определению будем иметь

$$I = \sum_i m_i \delta_i^2, \tag{13}$$

где сумма, очевидно, должна распространяться на все точки системы.

Обозначив, как обычно, через m массу $\sum_i m_i$ системы и положив

$$I = m\delta^2, \tag{14}$$

будем называть определенное таким образом положительное число δ, т. е.

$$\delta = \sqrt{\frac{I}{m}},$$

радиусом инерции системы S относительно оси r.

Механический смысл радиуса инерции непосредственно виден из формулы (14): δ есть то расстояние от оси r, на котором должна находиться материальная точка с массой m, равной массе системы,