а для второго $\frac{\alpha}{2} y^2 dx$; отсюда (пренебрегая бесконечно малыми третьего порядка, не влияющими на величину двойного интеграла) следует, что объем, образованный вращением площадки $dx\,dy$, равен $\alpha y\,dx\,dy$ и, следовательно,

$$V = \alpha \int_\sigma y\,dx\,dy.$$

Введем теперь центр тяжести G площади σ. Для координаты y_0 уравнение (12′) дает

$$y_0 = \frac{\int_\sigma y\,dx\,dy}{\sigma},$$

а отсюда следует равенство

$$V = \sigma\alpha y_0,$$

которое и доказывает теорему Гюльдена, так как αy_0 есть не что иное, как дуга, описанная центром тяжести G фигуры σ при повороте на угол α.

§ 5. Моменты инерции

18. Определения. Пусть P — материальная точка с массой m, r — какая-либо прямая, δ — расстояние точки P от r.

Моментом инерции точки P относительно оси r называется произведение $m\delta^2$ массы точки на квадрат ее расстояния от оси.

Моментом инерции системы S, состоящей из конечного числа материальных точек P_i $(i = 1, 2, \ldots,)$, относительно оси r называется сумма моментов инерции отдельных ее точек.

Обозначив через I момент инерции системы, через m_i массу i-й ее точки P_i, через δ_i расстояние точки P_i от оси r, согласно определению будем иметь

$$I = \sum_i m_i \delta_i^2, \tag{13}$$

где сумма, очевидно, должна распространяться на все точки системы.

Обозначив, как обычно, через m массу $\sum_i m_i$ системы и положив

$$I = m\delta^2, \tag{14}$$

будем называть определенное таким образом положительное число δ, т. е.

$$\delta = \sqrt{\frac{I}{m}},$$

радиусом инерции системы S относительно оси r.

Механический смысл радиуса инерции непосредственно виден из формулы (14): δ есть то расстояние от оси r, на котором должна находиться материальная точка с массой m, равной массе системы, чтобы момент инерции ее относительно оси r был равен моменту инерции I системы.

Размерность момента инерции, как это следует из формулы (14), есть l^2m; размерность же радиуса инерции есть l, что непосредственно видно из его определения.

19. Аналогично определению момента инерции любой материальной системы S относительно оси можно ввести еще следующие определения.

1. Моментом инерции системы S относительно точки P называется сумма произведений масс точек системы S на квадраты их расстояний от P (так называемый полярный момент инерции, п. 14).

2. Моментом инерции системы S относительно плоскости π называется сумма произведений масс точек системы S на квадраты их расстояний от плоскости π.

В приложениях почти исключительно пользуются моментами инерции относительно оси, поэтому мы ограничиваемся изучением только их.

20. Изменение момента инерции при изменении положения оси. Для заданной материальной системы S существует бесконечно много моментов инерции I, соответствующих бесконечному множеству осей r. Мы изучим, как изменяется I при изменении положения r.

Исследование упростится, если предварительно заметим, что можно ограничиться разбором двух частных случаев, а именно:

а) как изменяются моменты инерции относительно параллельных осей;

б) как изменяются моменты инерции относительно осей, пересекающихся в одной точке.

Действительно, предполагая известными законы изменения моментов инерции в случаях „а“ и „б“, мы будем в состоянии найти соотношение между моментами инерции относительно двух осей r, s, расположенных как угодно в пространстве. Для этого достаточно провести через точку, выбранную как угодно на s, прямую r', параллельную r. Ответ на вопрос „а“ позволит нам перейти от момента инерции относительно r к моменту инерции относительно r', а ответ на вопрос „б“ — от момента инерции относительно r' к моменту инерции относительно s.

21. Прежде всего докажем теорему, принадлежащую Гюйгенсу [1]) (и сформулированную Эйлером, которому принадлежит введение понятия и систематическая теория моментов инерции).

---

[1]) Христиан Гюйгенс родился в Гааге в 1629 г., умер там же в 1695 г., был одним из трех первых иностранных членов Академии наук в Париже и Королевского общества в Лондоне. Главнейшие его труды: открытие кольца

Момент инерции системы относительно оси r равен моменту инерции I_0 относительно оси r_0, параллельной r и проходящей через центр тяжести, сложенному с произведением массы системы на квадрат расстояния d между этими осями.

Примем за ось z ось r_0, параллельную r и проходящую через центр тяжести G, и за плоскость zx плоскость, содержащую прямую r. При этих условиях уравнения прямой r будут иметь вид

$$x=d, \qquad y=0,$$

где d — расстояние между двумя осями.

Поэтому, если обозначим через x_i, y_i, z_i координаты произвольной точки P_i системы S, то координатами ее проекции Q_i на прямую r будут d, 0, z_i. Расстояние δ_i точки P_i от оси r есть не что иное, как длина отрезка P_iQ_i, поэтому

$$\delta_i^2=(x_i-d)^2+y_i^2$$

и, следовательно, согласно определению момента инерции I, мы будем иметь

$$I=\sum_i [(x_i-d)^2+y_i^2]=\sum_i m_i(x_i+y_i)^2-2d\sum_i m_ix_i+d^2\sum_i m_i.$$

Если заметим, что ось z мы провели через центр тяжести G и что, следовательно, координата x_0 этой точки равна нулю, то увидим, что сумма $\sum_i m_ix_i$ равна нулю; с другой стороны, сумма $\sum_i m_i(x_i^2+y_i^2)$ равна моменту инерции относительно оси z, т. е. I_0; $\sum_i m_i$ есть полная масса m системы.

Поэтому мы имеем равенство

$$I=I_0+md^2, \tag{15}$$

которое и нужно было вывести.

Эта формула показывает, что между всеми осями, параллельными заданному направлению, та, для которой момент инерции наименьший, проходит через центр тяжести. Кроме того, если для заданной системы мы знаем момент инерции I относительно оси r и положение центра тяжести, то равенство (15) позволяет вычислить значение I' момента инерции относительно другой какой-

---

Сатурна, первая волновая теория распространения света, которая позволила ему объяснить, помимо известных тогда явлений, явление двойного преломления, открытого им же в исландском шпате, наконец, его вклады в механику, из которых мы ограничимся упоминанием закона колебаний маятника с практическими приложениями к устройству часов; в его исследованиях о колебаниях физического маятника по существу и содержится понятие о моменте инерции и приводимая в тексте теорема. Ср. Horologium oscillatorium (Париж, 1673 г.).

нибудь прямой r', параллельной r. Действительно, мы имеем два соотношения

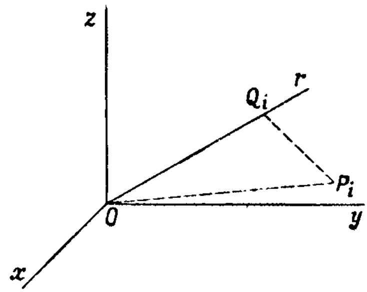
$$I = I_0 + md^2, \qquad I' = I_0 + md'^2,$$

где через d' обозначено расстояние от центра тяжести до прямой r', или же расстояние между осями r' и r_0. Исключив I_0, получим

$$I' = I + m(d'^2 - d^2).$$

При заданных предположениях величины в правой части все известны.

22. Моменты инерции относительно пересекающихся осей. Определив, каким образом изменяется момент инерции, когда ось, к которой он относится, изменяет положение, но не направление, рассмотрим поведение момента инерции относительно оси, проходящей через точку O и изменяющей свое направление в пространстве.



Фиг. 17.

Поместим в O начало координат (фиг. 17), и пусть α, β, γ будут направляющими косинусами прямой r (на которой установлено определенное направление как положительное). Из прямоугольного треугольника OP_iQ_i видно, что расстояние δ_i любой точки P_i системы S от оси r определяется соотношением

$$\delta_i^2 = OP_i^2 - OQ_i^2;$$

так как $OP_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$, а проекция OQ_i вектора $\overrightarrow{OP_i}$ на ось r равна $x_i\alpha + y_i\beta + z_i\gamma$, то будем иметь

$$\delta_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - (x_i\alpha + y_i\beta + z_i\gamma)^2 =$$
$$= (1-\alpha^2)x_i^2 + (1-\beta^2)y_i^2 + (1-\gamma^2)z_i^2 -$$
$$- 2\beta\gamma y_i z_i - 2\gamma\alpha z_i x_i - 2\alpha\beta x_i y_i.$$

Если вместо $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ напишем единицу, то после перегруппировки членов получим [1])

$$\delta_i^2 = \alpha^2(y_i^2 + z_i^2) + \beta^2(z_i^2 + x_i^2) + \gamma^2(x_i^2 + y_i^2) -$$
$$- 2\beta\gamma y_i z_i - 2\gamma\alpha z_i x_i - 2\alpha\beta x_i y_i;$$

---

[1]) Выражение δ_i^2 можно было бы также получить, рассматривая момент относительно точки P_i единичного вектора оси r, который мы представим себе приложенным в O. Проекции этого момента определяются (гл. I, п. 27)

поэтому будем иметь

$$I=\sum_i m_i\delta_i^2=\alpha^2\sum_i m_i(y_i^2+z_i^2)+\beta^2\sum_i m_i(z_i^2+x_i^2)+\gamma^2\sum_i m_i(x_i^2+y_i^2)-$$
$$-2\beta\gamma\sum_i m_iy_iz_i-2\gamma\alpha\sum_i m_iz_ix_i-2\alpha\beta\sum_i m_ix_iy_i$$

или

$$I=A\alpha^2+B\beta^2+C\gamma^2-2A'\beta\gamma-2B'\gamma\alpha-2C'\alpha\beta, \tag{16}$$

где положено

$$\begin{aligned} A&=\sum_i m_i(x_i^2+y_i^2), & B&=\sum_i m_i(z_i^2+x_i^2), & C&=\sum_i m_i(x_i^2+y_i^2),\\ A'&=\sum_i m_iy_iz_i, & B'&=\sum_i m_iz_ix_i, & C'&=\sum_i m_ix_iy_i. \end{aligned} \tag{17}$$

Равенство (16) определяет момент инерции относительно произвольного направления α, β, γ, проходящего через O, в функции от шести постоянных A, B, C, A', B', C', зависящих, как мы видим, от распределения масс в системе, но не от частного выбора оси r. В правой части равенства (16) стоит однородная квадратичная функция от α, β, γ, которая не изменится, если одновременно изменить α, β, γ на $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$. Это можно было предвидеть, так как при замене α, β, γ на $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$ изменяется только сторона, которую надо приписать r, а не сама прямая, момент же инерции I, как это видно из его определения, не зависит от направления, выбранного на прямой.

Коэффициенты A, B, C представляют собой моменты инерции относительно осей координат, как это видно из формулы (16), если подставить в нее вместо α, β, γ соответственно 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1. Остальные три коэффициента $A'=\sum_i m_iy_iz_i$, $B'=\sum_i m_iz_ix_i$, $C'=\sum_i m_ix_iy_i$ обычно называют *произведениями инерции* или также (по причине, которая будет выяснена в динамике твердого тела) *моментами девиации* [1]).

минорами матрицы

$$\left\|\begin{matrix} -x_i & -y_i & -z_i\\ \alpha & \beta & \gamma \end{matrix}\right\|$$

и, следовательно, квадратом модуля момента будет

$$(\beta z_i-\gamma y_i)^2+(\gamma x_i-\alpha z_i)^2+(\alpha y_i-\beta x_i)^2.$$

Модуль момента единичного вектора (произведение единицы на расстояние от точки P_i до оси r) по величине совпадает, очевидно, с δ_i.

[1]) В русской литературе их чаще всего называют центробежными моментами инерции. См., например, Г. К. Суслов, Теоретическая механика, 1946, стр. 255. (*Прим. ред.*)

Согласно равенству (17), определение трех моментов инерции A, B, C приводится к определению трех сумм:

$$s_1 = \sum_i m_i x_i^2, \quad s_2 = \sum_i m_i y_i^2, \quad s_3 = \sum_i m_i z_i^2, \tag{18}$$

которые можно истолковать как моменты инерции системы относительно координатных плоскостей. Действительно, имеем тождественно

$$A = s_2 + s_3, \quad B = s_3 + s_1, \quad C = s_1 + s_2. \tag{19}$$

§ 6. Эллипсоид инерции. Главные оси инерции. Замечательные частные случаи

23. Закону изменения моментов инерции относительно оси, проходящей через неподвижную точку и изменяющей свое направление в пространстве, который аналитически выражается равенством (16), можно придать наглядное геометрическое истолкование.

Представим себе, что на каждом луче α, β, γ, выходящем из точки O, откладывается от O отрезок

$$OL = \frac{1}{\sqrt{I}}, \tag{20}$$

где I есть квадратичная функция от α, β, γ, определенная равенством (16).

Если исключим частный случай, когда все точки P_i системы S лежат на одной прямой, проходящей через O, то момент инерции $I = \sum_i m_i \delta_i^2$ не может быть нулем ни для какого направления α, β, γ, проведенного через O; величина $1/\sqrt{I}$, *соответствующая всякому лучу*, будет поэтому числом конечным, а геометрическое место E точек L представит *замкнутую* поверхность, окружающую точку O и симметричную относительно нее, потому что на двух противоположных лучах точки L лежат на одном и том же расстоянии от O, как это следует из равенства (20); вспомним (предыдущий пункт), что I не изменяется, когда изменяется знак у α, β, γ. Теперь легко найти и уравнение поверхности. В самом деле, обозначив через x, y, z координаты любой точки L поверхности, будем иметь

$$x = OL \cdot \alpha = \frac{\alpha}{\sqrt{I}}, \quad y = OL \cdot \beta = \frac{\beta}{\sqrt{I}}, \quad z = OL \cdot \gamma = \frac{\gamma}{\sqrt{I}}$$

или

$$\alpha = x\sqrt{I}, \quad \beta = y\sqrt{I}, \quad \gamma = z\sqrt{I};$$

если в формуле (16) вместо α, β, γ подставим эти значения, то по сокращении на I получим

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 2A'yz - 2B'zx - 2C'xy = 1. \tag{21}$$