Согласно равенству (17), определение трех моментов инерции A, B, C приводится к определению трех сумм:

$$s_1 = \sum_i m_i x_i^2, \quad s_2 = \sum_i m_i y_i^2, \quad s_3 = \sum_i m_i z_i^2, \tag{18}$$

которые можно истолковать как моменты инерции системы относительно координатных плоскостей. Действительно, имеем тождественно

$$A = s_2 + s_3, \quad B = s_3 + s_1, \quad C = s_1 + s_2. \tag{19}$$

§ 6. Эллипсоид инерции. Главные оси инерции. Замечательные частные случаи

23. Закону изменения моментов инерции относительно оси, проходящей через неподвижную точку и изменяющей свое направление в пространстве, который аналитически выражается равенством (16), можно придать наглядное геометрическое истолкование.

Представим себе, что на каждом луче α, β, γ, выходящем из точки O, откладывается от O отрезок

$$OL = \frac{1}{\sqrt{I}}, \tag{20}$$

где I есть квадратичная функция от α, β, γ, определенная равенством (16).

Если исключим частный случай, когда все точки P_i системы S лежат на одной прямой, проходящей через O, то момент инерции $I = \sum_i m_i \delta_i^2$ не может быть нулем ни для какого направления α, β, γ, проведенного через O; величина $1/\sqrt{I}$, *соответствующая всякому лучу*, будет поэтому числом конечным, а геометрическое место E точек L представит *замкнутую* поверхность, окружающую точку O и симметричную относительно нее, потому что на двух противоположных лучах точки L лежат на одном и том же расстоянии от O, как это следует из равенства (20); вспомним (предыдущий пункт), что I не изменяется, когда изменяется знак у α, β, γ. Теперь легко найти и уравнение поверхности. В самом деле, обозначив через x, y, z координаты любой точки L поверхности, будем иметь

$$x = OL \cdot \alpha = \frac{\alpha}{\sqrt{I}}, \quad y = OL \cdot \beta = \frac{\beta}{\sqrt{I}}, \quad z = OL \cdot \gamma = \frac{\gamma}{\sqrt{I}}$$

или

$$\alpha = x\sqrt{I}, \quad \beta = y\sqrt{I}, \quad \gamma = z\sqrt{I};$$

если в формуле (16) вместо α, β, γ подставим эти значения, то по сокращении на I получим

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 2A'yz - 2B'zx - 2C'xy = 1. \tag{21}$$

Это и есть уравнение поверхности E. Отсюда видим, что мы имеем дело с поверхностью второго порядка, а так как мы знаем, кроме того, что поверхность E должна быть замкнутой, то она может быть только эллипсоидом, центр которого есть точка O, как это следует из симметрии поверхности E относительно O.

24. Эллипсоид E называется *эллипсоидом инерции* относительно точки O. Если эллипсоид инерции дан, то можно найти момент инерции относительно всякой прямой r, проходящей через O. Действительно, обозначив через L одну из двух точек, в которых r пересекает эллипсоид, мы получим на основании равенства (20)

$$I = \frac{1}{\overline{OL}^2}. \tag{20'}$$

Отсюда следует, что из всех осей, проведенных через O, та, которой соответствует наименьший момент инерции, является большой осью, а та, которой соответствует наибольший момент инерции, — малой осью эллипсоида инерции.

Оси эллипсоида инерции называются *главными осями инерции относительно рассматриваемой точки*.

Принимая их за оси координат, уравнение (21) можно привести к виду

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1; \tag{21}$$

произведения инерции A', B', C' равны в этом случае нулю, или, если принять во внимание вторую группу равенств (17), равны нулю суммы

$$\sum_i m_i y_i z_i, \qquad \sum_i m_i z_i x_i, \qquad \sum_i m_i x_i y_i.$$

Величины A, B, C, очевидно, сохраняют свой смысл и, следовательно, будут *моментами инерции относительно главных осей*, или, как обычно говорят, *главными моментами инерции*. Соответствующие радиусы инерции

$$\sqrt{\frac{A}{m}}, \qquad \sqrt{\frac{B}{m}}, \qquad \sqrt{\frac{C}{m}}$$

называются *главными радиусами инерции*.

25. Эллипсоид инерции относительно центра тяжести системы называется *центральным эллипсоидом инерции*.

В общем случае, когда хотят вполне описать распределение моментов инерции заданной системы, указывают (помимо полной массы) элементы, определяющие центральный эллипсоид инерции, т. е. оси и главные моменты (или главные радиусы) инерции относительно центра тяжести. Этим будут определены в сжатой форме моменты инерции относительно любой центральной (т. е. проходящей через центр тяжести) оси; моменты же инерции относительно оси, не проходящей через центр тяжести, определятся из равенства (15).

В некоторых случаях самая конфигурация системы (п. 13) показывает, где находится центр тяжести и как направлены относящиеся к нему главные оси инерции. Принимая их за оси координат, можно сказать (п. 22), что все сводится к тому, чтобы определить три суммы:

$$s_1=\sum_i m_i x_i^2, \quad s_2=\sum_i m_i y_i^2, \quad s_3=\sum_i m_i z_i^2,$$

представляющие собой моменты инерции системы относительно главных плоскостей центрального эллипсоида инерции.

Полезно отметить, что если система S отнесена к главным осям инерции, проходящим через центр тяжести, то каждая из шести сумм

$$\sum_i m_i x_i, \quad \sum_i m_i y_i, \quad \sum_i m_i z_i, \quad \sum_i m_i y_i z_i, \quad \sum_i m_i z_i x_i, \quad \sum_i m_i x_i y_i$$

будет равна нулю; первые три равны нулю потому, что начало координат находится в центре тяжести, а вторые три (предыдущий пункт) — вследствие того, что оси координат являются главными осями инерции.

26. *Главная ось инерции относительно центра тяжести является главной осью инерции также и относительно всякой другой своей точки.*

Действительно, пусть O есть центр тяжести и Oz — одна из главных осей инерции. Тогда будем иметь

$$A'=\sum_i m_i y_i z_i=0, \qquad B'=\sum_i m_i z_i x_i=0.$$

Взяв на Oz какую-нибудь точку O_1, отличную от O, положим $OO_1=a$ и рассмотрим систему координат $O_1x_1y_1z$, оси которой x_1, y_1 параллельны осям x, y и одинаково направлены с ними. Новыми координатами точки $P_i(x_i, y_i, z_i)$ будут x_i, y_i, z_i-a, так что новые произведения инерции будут иметь значения

$$\left.\begin{aligned} A_1'&=\sum_i m_i y_i(z_i-a)=\sum_i m_i y_i z_i-a\sum_i m_i y_i,\\ B_1'&=\sum_i m_i(z_i-a)x_i=\sum_i m_i z_i x_i-a\sum_i m_i x_i;\end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

оба эти произведения инерции обращаются в нуль, потому что, по предположению, произведения инерции A', B' и статические моменты

$\sum\limits_i m_i x_i$, $\sum\limits_i m_i y_i$ равны нулю. Это и означает, что Oz является главной осью инерции также и относительно любой ее точки O.

Предположим теперь, что O есть произвольная точка системы и что одна из ее главных осей инерции Oz проходит через центр тяжести O_1; равенства (22), которые справедливы также и при этих предположениях, показывают, что если мы имеем

$$A' = B' = \sum_i m_i x_i = \sum_i m_i y_i = 0,$$

то будут обращаться в нуль также и A_1' и B_1'. *Таким образом, если прямая является главной осью инерции относительно одной из своих точек и проходит через центр тяжести, то она будет также главной осью инерции относительно центра тяжести (и, следовательно, относительно всякой другой своей точки).*

27. Если рассматриваемая система S имеет плоскость симметрии (п. 13), то достаточно принять ее за плоскость координат, чтобы два из произведений инерции обратились в нуль.

В самом деле, если плоскость симметрии принимается за плоскость $z = 0$, то имеем

$$\sum_i m_i x_i z_i = 0, \quad \sum_i m_i y_i z_i = 0,$$

так как для двух точек, симметричных относительно плоскости $z = 0$, величины m_i, x_i, y_i одни и те же, в то время как z_i равны по величине, но противоположны по знаку. Поэтому члены суммы попарно сокращаются.

Таким образом, если система имеет плоскость симметрии, то всякий перпендикуляр к этой плоскости является главной осью инерции для своего основания.

Кроме того, *если система имеет две взаимно перпендикулярные плоскости симметрии, то они необходимо будут главными плоскостями эллипсоида инерции относительно какой угодно точки прямой их пересечения.*

Действительно, если примем эти плоскости за координатные плоскости, то, очевидно, обратятся в нуль все произведения инерции.

Эта теорема находит применение в случае тел вращения. Всякая меридианная плоскость, очевидно, есть плоскость симметрии, поэтому ось вращения является главной осью инерции для всякой ее точки, а соответствующие эллипсоиды инерции все будут эллипсоидами вращения вокруг этой оси.

28. Плоские системы. Если все точки системы лежат в одной плоскости, то момент инерции относительно какой-нибудь оси, перпендикулярной к этой плоскости, равен сумме моментов инерции относительно двух любых взаимно перпендикулярных осей, лежащих в плоскости и проходящих через точку пересечения этой плоскости с первой осью.

Примем плоскость, в которой лежат точки системы, за плоскость $z=0$, ось, перпендикулярную к плоскости, за ось z, а две другие взаимно перпендикулярные оси — за оси x и y. Тогда для всякой точки m_i системы имеем $z_i=0$, и, следовательно, на основании формулы (18) $s_3=0$; поэтому из равенств (19) найдем:

$$A=s_1, \quad B=s_2, \quad C=s_1+s_2=A+B,$$

что и доказывает наше утверждение.

29. Эллипс инерции. В некоторых случаях важно изучить распределение моментов инерции относительно осей, лежащих в некоторой плоскости π и пересекающихся в одной точке O. Типичным примером такого случая будет система материальных точек, лежащих в одной плоскости (предыдущий пункт). Изменение моментов инерции относительно осей, лежащих в плоскости π системы и проходящих через одну точку O, согласно с геометрическим истолкованием, изложенным в п. 23, определяется *эллипсом инерции* e, который получается при пересечении с плоскостью π эллипсоида инерции E относительно O. Если эллипс e отнесен к его главным осям $O\xi$, $O\eta$ и соответствующие моменты инерции обозначены через H и K, то уравнение этого эллипса имеет вид

$$H\xi^2+K\eta^2=1. \tag{23}$$

Момент инерции I_r относительно какой-нибудь прямой r, лежащей в плоскости π и проходящей через точку O, если направляющие косинусы этой прямой относительно осей системы $O\xi\eta$ равны α и β, может быть представлен в виде

$$I_r=H\alpha^2+K\beta^2. \tag{24}$$

Докажем теперь следующее замечательное свойство эллипса инерции e: *Расстояние от центра O до какой-нибудь касательной к эллипсу инерции пропорционально моменту инерции I_r относительно прямой, проходящей через O и параллельной рассматриваемой касательной, и* (по абсолютной величине) *равно*

$$p=\sqrt{\frac{I_r}{HK}}. \tag{25}$$

Действительно, если обозначим через ξ_1, η_1 координаты точки касания, то из уравнения касательной

$$H\xi_1\xi+K\eta_1\eta=1$$

будет следовать, что направляющие косинусы перпендикуляра на касательную (направленного от O к касательной) и длина p этого перпендикуляра определятся выражениями

$$\frac{H\xi_1}{\sqrt{H^2\xi_1^2+K^2\eta_1^2}}, \quad \frac{K\eta_1}{\sqrt{H^2\xi_1^2+K^2\eta_1^2}}, \quad p=\frac{1}{\sqrt{H^2\xi_1^2+K^2\eta_1^2}}.$$

Отсюда следует, что направляющими косинусами прямой r, параллельной касательной и проходящей через точку O (ориентированной в том или другом направлении), будут

$$\alpha=\frac{\pm K\eta_1}{\sqrt{H^2\xi_1^2+K^2\eta_1^2}}=\pm K\eta_1 p, \quad \beta=\frac{\mp H\xi_1}{\sqrt{H^2\xi_1^2+K^2\eta_1^2}}=\mp H\xi_1 p,$$

так что равенство (24) примет вид

$$I_r=HK(H\xi_1^2+K\eta_1^2)p^2;$$

а так как в силу равенства (23) оно сводится к равенству

$$I_r=HKp^2,$$

то формула (25) тем самым доказана.

30. Из только что установленных свойств следует, что, если для всякой прямой r, проходящей через точку O, проведены с той и другой стороны параллельные ей прямые, находящиеся от O на расстоянии $p'=\lambda\sqrt{I_r}$, где λ есть произвольный постоянный коэффициент пропорциональности, то огибающая полученных таким образом прямых будет эллипсом e', гомотетичным [1]) эллипсу e'; отношение гомотетии (отношение подобия) между эллипсами e' и e будет p'/p, или, на основании формулы (25), $\lambda\sqrt{HK}$.

Если, в частности, мы возьмем $\lambda=2/\sqrt{m}$, где m означает массу системы, то получим такой эллипс e_0, что расстояние каждой его касательной от параллельной ей прямой r, проходящей через центр, будет равно $\sqrt{I_r/m}$, т. е. радиусу инерции δ_r системы относительно прямой r. Так как отношение гомотетии между эллипсами e_0 и e равно $\sqrt{HK/m}$, то уравнение эллипса e_0 будет иметь вид

$$H\xi^2+K\eta^2=\frac{HK}{m}$$

или, если обозначим через h и k радиусы инерции, соответствующие двум осям $O\xi$, $O\eta$, так что $H=mh^2$, $K=mk^2$,

$$\frac{\xi^2}{k^2}+\frac{\eta^2}{h^2}=1.$$

Следовательно, полуоси эллипса, лежащие на прямых $O\xi$ и $O\eta$, равны соответственно радиусам инерции относительно $O\eta$ и $O\xi$;

---

[1]) Определение гомотетии см. Ж. Адамар, Элементарная геометрия, ч. I, стр. 125; ч. II, стр. 121, Учпедгиз, 1938. (*Прим. перев.*)

вообще, расстояние от центра до любой касательной дает радиус инерции относительно диаметра, параллельного рассматриваемой касательной.

§ 7. Моменты инерции тел, поверхностей и линий. Примеры

31. Едва ли нужно доказывать, что понятие о моменте инерции и его свойства, установленные для дискретных масс, можно непосредственно распространить и на массы, непрерывно распределенные по объему, поверхности или линии. Достаточно вспомнить соображения, посредством которых аналогичное обобщение было оправдано для центров тяжести (п. 15).

С аналитической точки зрения дело сводится к замене формулы

$$I = \sum_i m_i \delta_i^2,$$

определяющей момент инерции, и, вообще, сумм, распространенных на точки системы S, интегралами, распространенными на область S (объем, поверхность или линию), занимаемую системой.

Таким образом, если dS есть любой элемент области, содержащий точку P, dm — масса элемента, δ — расстояние точки P от оси r, μ — плотность (объемная, поверхностная или линейная) в P, то будем иметь формулу

$$I = \int_S \delta^2 dm = \int_S \mu\delta^2 \, dS, \tag{26}$$

которую в случае однородной системы можно написать в виде

$$I = \mu \int_S \delta^2 \, dS. \tag{26'}$$

32. Прямой однородный параллелепипед. Центр тяжести O совпадает с точкой пересечения диагоналей (п. 16).

Три плоскости, параллельные граням и проведенные через точку O, являются плоскостями симметрии и, следовательно (п. 27), главными плоскостями центрального эллипсоида инерции, так что, согласно общему замечанию п. 25, дело сводится к вычислению моментов инерции s_1, s_2, s_3 относительно этих трех плоскостей.

Обозначив, как обычно, через μ плотность (по предположению, постоянную) и через a, b, c — длины трех ребер, будем иметь

$$m = \mu abc.$$

Возьмем начало координат в точке O и направим оси параллельно ребрам, вследствие чего уравнения шести граней будут иметь вид

$$x = \pm \frac{a}{2}, \quad y = \pm \frac{b}{2}, \quad z = \pm \frac{c}{2}.$$