вообще, расстояние от центра до любой касательной дает радиус инерции относительно диаметра, параллельного рассматриваемой касательной.

§ 7. Моменты инерции тел, поверхностей и линий. Примеры

31. Едва ли нужно доказывать, что понятие о моменте инерции и его свойства, установленные для дискретных масс, можно непосредственно распространить и на массы, непрерывно распределенные по объему, поверхности или линии. Достаточно вспомнить соображения, посредством которых аналогичное обобщение было оправдано для центров тяжести (п. 15).

С аналитической точки зрения дело сводится к замене формулы

$$I = \sum_i m_i \delta_i^2,$$

определяющей момент инерции, и, вообще, сумм, распространенных на точки системы S, интегралами, распространенными на область S (объем, поверхность или линию), занимаемую системой.

Таким образом, если dS есть любой элемент области, содержащий точку P, dm — масса элемента, δ — расстояние точки P от оси r, μ — плотность (объемная, поверхностная или линейная) в P, то будем иметь формулу

$$I = \int_S \delta^2 dm = \int_S \mu\delta^2 \, dS, \tag{26}$$

которую в случае однородной системы можно написать в виде

$$I = \mu \int_S \delta^2 dS. \tag{26'}$$

32. Прямой однородный параллелепипед. Центр тяжести O совпадает с точкой пересечения диагоналей (п. 16).

Три плоскости, параллельные граням и проведенные через точку O, являются плоскостями симметрии и, следовательно (п. 27), главными плоскостями центрального эллипсоида инерции, так что, согласно общему замечанию п. 25, дело сводится к вычислению моментов инерции s_1, s_2, s_3 относительно этих трех плоскостей.

Обозначив, как обычно, через μ плотность (по предположению, постоянную) и через a, b, c — длины трех ребер, будем иметь

$$m = \mu abc.$$

Возьмем начало координат в точке O и направим оси параллельно ребрам, вследствие чего уравнения шести граней будут иметь вид

$$x = \pm \frac{a}{2}, \quad y = \pm \frac{b}{2}, \quad z = \pm \frac{c}{2}.$$

Выражение для s_1 мы можем написать в виде

$$s_1 = \mu \int\int\int x^2\,dx\,dy\,dz,$$

где интегрирование по x, y, z будет производиться между пределами

$$-\frac{a}{2} \text{ и } +\frac{a}{2}, \qquad -\frac{b}{2} \text{ и } +\frac{b}{2}, \qquad -\frac{c}{2} \text{ и } +\frac{c}{2}.$$

Так как подинтегральная функция x^2 не зависит ни от y, ни от z, то можно интегрировать по этим двум аргументам при любом значении x, что дает

$$s_1 = \mu bc \int\limits_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} x^2\,dx;$$

вспоминая, что масса параллелепипеда равна μabc, получим

$$s_1 = \mu bc \frac{2}{3} \frac{a^3}{8} = m \frac{a^2}{12}.$$

Выполнив круговую замену букв a, b, c, получим, очевидно,

$$s_2 = m \frac{b^2}{12}, \qquad s_3 = m \frac{c^2}{12},$$

так что главные моменты инерции получат вид

$$A = m \frac{b^2 + c^2}{12}, \qquad B = m \frac{c^2 + a^2}{12}, \qquad C = m \frac{a^2 + b^2}{12},$$

а соответствующие радиусы инерции будут равны

$$\sqrt{\frac{b^2 + c^2}{12}}, \qquad \sqrt{\frac{c^2 + a^2}{12}}, \qquad \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{12}}.$$

33. Однородный прямоугольник. Центр O прямоугольника совпадает с его центром тяжести. Плоскость прямоугольника и две плоскости, проведенные через O перпендикулярно к сторонам, очевидно, являются главными плоскостями инерции, так что главными осями инерции будут прямые, параллельные сторонам, и перпендикуляр к плоскости прямоугольника.

Значения моментов и радиусов инерции можно получить и без прямого вычисления (хотя это вычисление и весьма просто), обращаясь к предыдущему случаю. В самом деле, рассмотрим однородный параллелепипед с ребрами a, b, c и объемной плотностью μ и предположим, что величиной c можно пренебречь по сравнению с величинами a, b, так что параллелепипед можно уподобить материальному прямоугольнику со сторонами a, b. Речь будет идти об однородном прямоугольнике; каждому его элементу dS будет соответствовать масса $\mu c dS$, а следовательно, поверхностная (постоянная) плотность ν будет равна μc.

Очевидно, можно сделать так, чтобы ν сохраняла заданное значение даже в том случае, когда c стремится к нулю: достаточно представить себе, что объемная плотность μ параллелепипеда возрастает при стремлении c к нулю, принимая значения $\mu = \nu/c$.

Для нашей цели достаточно, впрочем, заметить, что если материальный прямоугольник рассматривается как предел параллелепипеда, то масса прямоугольника должна быть равна массе m параллелепипеда. Если поэтому в формулах, относящихся к параллелепипеду, в которые входят a, b, c и m, положим $c = 0$, то непосредственно получим соответствующие формулы, относящиеся к однородному прямоугольнику.

Поэтому тремя главными моментами инерции относительно средних линий прямоугольника и общего перпендикуляра к ним в точке их пересечения будут

$$A = m\,\frac{b^2}{12}, \qquad B = m\,\frac{a^2}{12}, \qquad C = m\,\frac{a^2 + b^2}{12},$$

а соответствующими радиусами инерции

$$\frac{b}{\sqrt{12}}, \qquad \frac{a}{\sqrt{12}}, \qquad \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Как мы видим, C совпадает с $A + B$, что и должно иметь место на основании общего замечания п. 28.

34. Однородный эллипсоид. Центр и три главные плоскости эллипсоида совпадают, очевидно, с его центром тяжести и главными плоскостями центрального эллипсоида инерции.

Если через a, b, c обозначим полуоси данного эллипсоида, через μ — плотность, то объем эллипсоида будет равен $(^4/_3)\,\pi abc$, а для массы будем иметь выражение

$$m = \frac{4}{3}\,\pi\mu abc.$$

Уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

выражает поверхность эллипсоида, отнесенную к главным осям. Таким образом, и здесь все сводится к вычислению s_1, s_2, s_3.

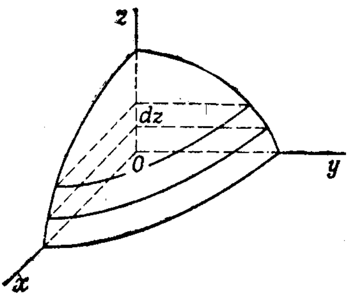
Прежде всего достаточно определить только одну из этих величин, так как две другие можно получить из нее круговой перестановкой букв a, b, c.

Рассмотрим, например,

$$s_3 = \int\int\int z^2\,dx\,dy\,dz,$$

где интегрирование должно быть распространено на весь объем эллипсоида.

Для того чтобы выполнить интегрирование наиболее простым способом, представим себе, что область интегрирования разложена на элементарные слои толщиной dz, заключенные между плоскостями, параллельными плоскости $z=0$ (фиг. 18). Функция z^2 под знаком интеграла остается постоянной (по крайней мере, с точностью до бесконечно малых) в каждом слое, и значение тройного интеграла по слою будет, очевидно, равно произведению z^2 на объем слоя, основанием которого, соответствующим произвольному значению z, является сечение нашего эллипсоида плоскостью, к которой относится это значение z.



Фиг. 18.

Контуром такого сечения является эллипс, который проектируется на плоскость xy в истинную величину в виде эллипса с уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{z^2}{c^2}$$

или

$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\right)^2} = 1.$$

Полуосями этого эллиптического сечения будут

$$a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}, \qquad b\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}},$$

так что площадь его равна

$$\pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)$$

и объем элементарного слоя будет равен поэтому

$$\pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)dz.$$

Для того чтобы исчерпать всю область интегрирования, достаточно изменять z от $-c$ до $+c$. Выражение s_3 можно поэтому написать в виде

$$s_3 = \mu\pi ab \int_{-c}^{c} z^2 \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) dz.$$

Проинтегрировав, мы получим

$$s_3 = \frac{4}{15} \pi\mu abc^3$$

или, вводя полную массу m,

$$s_3 = m \frac{c^2}{5}.$$

Аналогичные значения мы будем иметь и для двух других плоскостей:

$$s_1 = m \frac{a^2}{5}, \quad s_2 = m \frac{b^2}{5};$$

следовательно, главные моменты инерции определятся равенствами

$$A = m \frac{b^2 + c^2}{5}, \quad B = m \frac{c^2 + a^2}{5}, \quad C = m \frac{a^2 + b^2}{5},$$

а соответствующие радиусы инерции будут иметь вид

$$\sqrt{\frac{b^2 + c^2}{5}}, \quad \sqrt{\frac{c^2 + a^2}{5}}, \quad \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{5}}.$$

35. Шар. Момент инерции I_0 однородного шара с радиусом R относительно одного из его диаметров получится из любого из найденных выражений для A, B, C, если положить в них $a = b = c = R$. Поэтому момент инерции шара определится равенством

$$I_0 = \frac{2}{5} mR^2,$$

а радиус инерции будет равен

$$\sqrt{\frac{2}{5}} R.$$

36. Момент инерции относительно оси однородного круглого цилиндра, ограниченного двумя параллельными плоскостями. Пусть R есть радиус цилиндра, h — его высота, μ — плотность и I — искомый момент инерции. Можно избежать прямого вычисления, применив следующий искусственный прием. Момент инерции есть функция от радиуса R; если (при постоянных значениях h и μ) R возрастает на dR, то I получает приращение dI, представляющее собой момент инерции цилиндрического слоя с внутренним радиусом R и толщиной dR. Так как расстояние точек слоя от оси является для всех них равным R (с точностью до бесконечно малых), а масса слоя есть

$$\mu 2\pi Rh\, dR,$$

то будем иметь

$$dI = 2\pi\mu h R^3\, dR.$$

Отсюда следует, что

$$I = \frac{1}{2}\pi\mu h R^4 + \text{const},$$

а так как при $R = 0$ имеем $I = 0$, то можно написать

$$I = \frac{1}{2}\pi\mu h R^4.$$

Масса цилиндра равна $\mu\pi R^2 h$, поэтому окончательно имеем

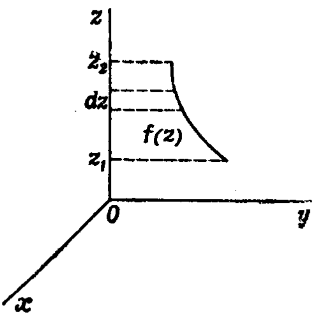
$$I = \frac{1}{2} mR^2,$$

а радиус инерции равен $R/\sqrt{2}$.

37. Однородный круглый диск. От случая цилиндра, очевидно, можно перейти к случаю диска, представляя себе, что высота h становится бесконечно малой. Как и в п. 33, мы будем иметь для диска поверхностную плотность ν, связанную с μ соотношением

$$\nu = h\mu;$$

так как m и R сохраняют их значения, то для момента инерции и для соответствующего радиуса инерции остаются в силе выражения $\frac{1}{2}mR^2$ и $R/\sqrt{2}$.



Фиг. 19.

38. Момент инерции относительно оси однородного твердого тела вращения, ограниченного двумя параллельными плоскостями. Пусть $y = f(z)$ есть уравнение меридиана поверхности вращения, имеющей осью вращения ось z (фиг. 19). Рассечем тело вращения плоскостями, перпендикулярными к оси, на элементарные диски. Момент инерции какого-нибудь одного из этих дисков с радиусом, равным R, и высотой dz будет равен (п. 36) $\frac{1}{2}\pi\mu R^4\, dz$, где μ представляет собой плотность; если $z = z_1$ и $z = z_2$ суть уравнения плоскостей, ограничивающих твердое тело, то момент инерции I определится равенством

$$I = \frac{\pi\mu}{2}\int_{z_1}^{z_2} R^4\, dz.$$

Но R есть не что иное, как текущая координата $y=f(z)$ точки меридиана, так что будем иметь

$$I=\frac{\pi\mu}{2}\int_{z_1}^{z_2}[f(z)]^4\,dz. \tag{27}$$

39. Усеченный конус. Если меридиан есть прямая $y=z\,\mathrm{tg}\,\alpha$, то тело вращения будет представлять собой круговой усеченный конус, половину угла при вершине которого обозначим через α. Формула (27) дает

$$I=\frac{\pi\mu\,\mathrm{tg}^4\alpha}{10}\left\{z_2^5-z_1^5\right\},$$

и, выражая I через радиусы $R_1=z_1\,\mathrm{tg}\,\alpha$, $R_2=z_2\,\mathrm{tg}\,\alpha$ и высоту $h=z_2-z_1$ усеченного конуса, получим

$$I=\frac{\pi\mu}{10}\,\frac{h}{R_2-R_1}\,(R_2^5-R_1^5).$$

Если заметим, что масса усеченного конуса есть

$$\frac{\pi\mu}{3}\,h\,(R_2^2+R_2R_1+R_1^2)=\frac{\pi\mu}{3}\,\frac{h}{R_2-R_1}\,(R_2^3-R_1^3),$$

то радиус инерции δ можно будет определить из соотношения

$$\delta^2=\frac{3}{10}\,\frac{R_2^5-R_1^5}{R_2^3-R_1^3}.$$

Для конуса ($R_1=0$, $R_2=R$), в частности, будем иметь

$$I=\frac{\pi\mu}{10}\,R^4h,\qquad \delta=\sqrt{\frac{3}{10}}\,R.$$

40. Сферический сегмент. Для вычисления момента инерции сферического сегмента относительно оси симметрии сегмента достаточно будет в равенстве (27) предположить, что меридиан представляет собой окружность с центром на оси вращения, например, в начале координат. Если обозначим через R радиус этой окружности, т. е. радиус сферы, которой принадлежит сегмент, то будем иметь

$$f(z)=\sqrt{R^2-z^2}$$

и, следовательно,

$$I=\frac{\pi\mu}{2}\int_{z_1}^{z_2}\{R^4-2R^2z^2+z^4\}\,dz=$$

$$=\frac{\pi\mu}{2}\left\{R^4(z_2-z_1)-\frac{2}{3}R^2(z_2^3-z_1^3)+\frac{1}{5}(z_2^5-z_1^5)\right\}.$$

Если сферический сегмент имеет только одно основание, то в предыдущей формуле надо положить

$$z_1 = 0.$$

УПРАЖНЕНИЯ

Примечание. Если речь будет идти о центре тяжести геометрической фигуры, то при этом будет подразумеваться, как в п. 4, что фигура однородна, т. е. что плотность заполняющего ее вещества постоянна.

1. Важное свойство положения центра тяжести, установленное в п. 11, можно получить прямым геометрическим путем, основываясь на том, что центр тяжести двух материальных точек лежит внутри соединяющего их отрезка, и принимая далее во внимание, что отрезок, соединяющий две точки выпуклой фигуры, за исключением его концов, лежит внутри фигуры.

2. Центр тяжести трапеции $ABCD$ лежит на прямой (диаметральной) EF, соединяющей средние точки E, F оснований AB и CD. Разделив трапецию на два треугольника посредством диагонали, применить свойство распределительности и правило моментов относительно каждого основания для доказательства того, что расстояния центра тяжести G_0 от обоих оснований находятся в отношении $(2a+b):(2b+a)$, где a и b — длины оснований. Отсюда приходим к следующему построению. Продолжим AB на длину $BH=DC$ и CD в противоположную сторону на длину $DK=BA$. Центр тяжести G будет тогда точкой пересечения EF с HK. Доказать это.

3. Показать, что центр тяжести кругового сектора лежит на радиусе, проходящем через середину его дуги, на расстоянии от центра, равном $^2/_3$ расстояния центра тяжести соответствующей дуги.

4. Найти центр тяжести кругового сегмента.

5. Доказать, что центр тяжести сегмента параболы (части плоскости, заключенной между параболой и какой-нибудь хордой) лежит на сопряженном с хордой диаметре на расстоянии от нее, равном $^2/_5$ хорды (Архимед).

6. Доказать, что центр тяжести сферической зоны (части сферической поверхности, заключенной между двумя параллельными плоскостями) находится на середине высоты.

7. Каждый элемент тела C (однородного или неоднородного) притягивает точку P с силой, прямо пропорциональной массе элемента и расстоянию его от P. Доказать, что результирующая притяжения, испытываемого точкой P, проходит через центр тяжести C.

8. Дана цилиндрическая ось длиной L и с радиусом r, по которой может скользить надетый на эту ось и соосный с ней цилиндрический диск толщиной l и с внешним радиусом R. Диск и ось однородны, но плотность диска равна половине плотности цилиндрической оси. Пусть d есть расстояние от центра тяжести диска до центра тяжести цилиндрической оси. Найти центр тяжести системы.

9. Тело состоит из центральной цилиндрической части (длиной l и с радиусом r) (фиг. 20), несущей на одном своем конце конус (высотой h