Если сферический сегмент имеет только одно основание, то в предыдущей формуле надо положить

$$z_1 = 0.$$

УПРАЖНЕНИЯ

Примечание. Если речь будет идти о центре тяжести геометрической фигуры, то при этом будет подразумеваться, как в п. 4, что фигура однородна, т. е. что плотность заполняющего ее вещества постоянна.

1. Важное свойство положения центра тяжести, установленное в п. 11, можно получить прямым геометрическим путем, основываясь на том, что центр тяжести двух материальных точек лежит внутри соединяющего их отрезка, и принимая далее во внимание, что отрезок, соединяющий две точки выпуклой фигуры, за исключением его концов, лежит внутри фигуры.

2. Центр тяжести трапеции $ABCD$ лежит на прямой (диаметральной) EF, соединяющей средние точки E, F оснований AB и CD. Разделив трапецию на два треугольника посредством диагонали, применить свойство распределительности и правило моментов относительно каждого основания для доказательства того, что расстояния центра тяжести G_0 от обоих оснований находятся в отношении $(2a+b):(2b+a)$, где a и b — длины оснований. Отсюда приходим к следующему построению. Продолжим AB на длину $BH = DC$ и CD в противоположную сторону на длину $DK = BA$. Центр тяжести G будет тогда точкой пересечения EF с HK. Доказать это.

3. Показать, что центр тяжести кругового сектора лежит на радиусе, проходящем через середину его дуги, на расстоянии от центра, равном $^2/_3$ расстояния центра тяжести соответствующей дуги.

4. Найти центр тяжести кругового сегмента.

5. Доказать, что центр тяжести сегмента параболы (части плоскости, заключенной между параболой и какой-нибудь хордой) лежит на сопряженном с хордой диаметре на расстоянии от нее, равном $^2/_5$ хорды (Архимед).

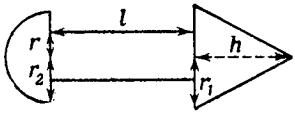
6. Доказать, что центр тяжести сферической зоны (части сферической поверхности, заключенной между двумя параллельными плоскостями) находится на середине высоты.

7. Каждый элемент тела C (однородного или неоднородного) притягивает точку P с силой, прямо пропорциональной массе элемента и расстоянию его от P. Доказать, что результирующая притяжения, испытываемого точкой P, проходит через центр тяжести C.

8. Дана цилиндрическая ось длиной L и с радиусом r, по которой может скользить надетый на эту ось и соосный с ней цилиндрический диск толщиной l и с внешним радиусом R. Диск и ось однородны, но плотность диска равна половине плотности цилиндрической оси. Пусть d есть расстояние от центра тяжести диска до центра тяжести цилиндрической оси. Найти центр тяжести системы.

9. Тело состоит из центральной цилиндрической части (длиной l и с радиусом r) (фиг. 20), несущей на одном своем конце конус (высотой h

и с радиусом основания r_1) и на другом конце полусферу (с радиусом r_2). Все части тела состоят из одного и того же однородного материала. Найти центр тяжести тела.



Фиг. 20.

10. Найти центр тяжести октанта сферы.

11. Вторая теорема Гюльдена. Поверхность образована плоской кривой, вращающейся вокруг оси, лежащей в ее плоскости и не пересекающей эту кривую; площадь поверхности равна произведению длины кривой на длину дуги, описанной центром тяжести (на длину окружности, если речь идет о полном повороте).

12. Определить поверхность и объем тора, пользуясь теоремами Гюльдена.

13. Пусть a и b — полуоси эллипса и S — полуэллипс, находящийся с одной стороны от той оси, длина которой равна $2l$. Найти центр тяжести площади S, пользуясь теоремой Гюльдена и известным выражением $\frac{4}{3}\pi a^2 b$ объема, образованного полным вращением фигуры S.

14. Радиус инерции тела относительно какой-нибудь оси равен гипотенузе прямоугольного треугольника, катетами которого являются: 1) радиус инерции относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр тяжести, 2) расстояние между обеими осями.

15. Материальная система S состоит из двух частей S_1 и S_2. Пусть I_1 I_2 и I — моменты инерции соответственно S_1, S_2 и S относительно параллельных между собой осей, проходящих через соответствующие центры тяжести.

Показать, что

$$I = I_1 + I_2 + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} d^2,$$

где m_1, m_2 — массы частей S_1 и S_2 и d — расстояние между соответствующими центральными осями.

16. Из трех главных моментов инерции, относящихся к одной и той же точке, ни один не может превзойти сумму двух других. Вывести отсюда, что если эллипсоид инерции есть эллипсоид вращения, то он может быть сколь угодно удлиненным, но не сколь угодно сжатым. Если назовем сжатием отношение $(a - c)/a$, где a означает экваториальный радиус и c — полярную полуось, то наибольшее значение, которое может иметь сжатие, есть $1 - 1/\sqrt{2}$.

17. Показать, что радиус инерции однородного прямоугольника со сторонами a, b относительно стороны длиной a равен $b/\sqrt{3}$.

18. Радиус инерции однородного треугольника относительно одной из сторон равен $h/\sqrt{6}$, где h — соответствующая этой стороне высота. Пока-

зать, что радиус инерции относительно перпендикуляра к плоскости треугольника, проведенного через центр тяжести, равен $\sqrt{a^2+b^2+c^2}/6$ (a, b, c — стороны треугольника).

19. Определить центральный эллипсоид инерции полого параллелепипеда (коробки, ящика и т. п.), т. е. однородно распределенной массы, заключенной между двумя прямыми прямоугольными параллелепипедами, имеющими один и тот же центр и параллельные грани [сначала составляется разность между главными моментами инерции обоих параллелепипедов (п. 32), относящимися к общему центру].

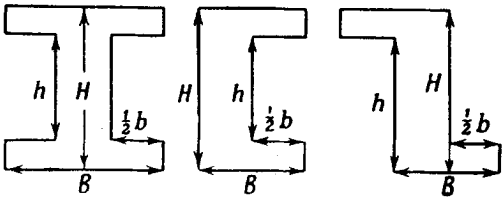
20. Дана кубическая коробка, грани которой имеют столь малую толщину, что их можно уподобить материальным поверхностям. Показать (или на основании предыдущего упражнения, или обращаясь к пп. 33 и 21), что радиус инерции относительно одной из центральных осей, параллельной одному из ребер, равен $\sqrt{10}a/6$, где a — длина ребра.

21. Доказать (вспоминая п. 33), что центральные моменты инерции прямоугольной рамы (масса, равномерно распределенная между двумя прямоугольниками с одним и тем же центром и с параллельными сторонами) относительно прямых, параллельных сторонам, суть

$$\frac{\nu}{12}(HB^3-hb^3), \qquad \frac{\nu}{12}(BH^3-bh^3),$$

где: ν — плотность;
B и H — основание и высота внешнего прямоугольника;
b и h — соответствующие размеры внутреннего прямоугольника.

22. Сечения балок имеют форму I, C, L (фиг. 21). Доказать, что для каждого из трех сечений момент инерции относительно центральной оси,



Фиг. 21.

параллельной основаниям (т. е. отрезкам длиной B и b), равен

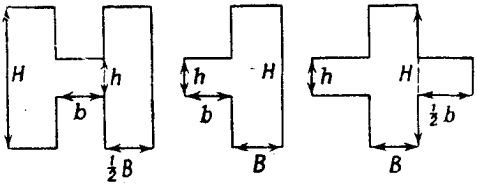
$$\frac{\nu}{12}(BH^3-bh^3),$$

где ν есть постоянная поверхностная плотность.

23. Сечения балок имеют форму H, ⊣, + (фиг. 22). Доказать, что для момента инерции будем иметь выражение

$$\frac{\nu}{12}(BH^3+bh^3).$$

24. Доказать, что радиус инерции круглого однородного диска относительно одного из диаметров равен половине радиуса диска (ср. пп. 28 и 37).



Фиг. 22.

25. Доказать, что для кругового однородного кольца, заключенного между двумя окружностями с радиусами R_1, R_2, момент инерции относительно одного из диаметров равен $\frac{\pi\nu(R_1^4 - R_2^4)}{4}$ (ν — плотность), а момент инерции относительно оси, перпендикулярной к плоскости кольца и проведенной через центр, вдвое больше (п. 28).

Соответствующими радиусами инерции будут

$$\frac{1}{2}\sqrt{R_1^2 + R_2^2} \quad \text{и} \quad \sqrt{\frac{1}{2}(R_1^2 + R_2^2)}.$$

26. Доказать, что радиус инерции однородной сферической оболочки относительно любого диаметра равен

$$\sqrt{\frac{2(R_1^5 - R_2^5)}{5(R_1^3 - R_2^3)}},$$

где R_1 и R_2 — радиусы обеих сфер, ограничивающих оболочку.

27. Доказать, что моменты инерции однородного эллипса относительно его осей равны

$$\frac{\nu\pi}{4}ab^3, \qquad \frac{\nu\pi}{4}ba^3,$$

где: ν — плотность;
a и b — полуоси.

28. Доказать, что главные радиусы инерции (относительно центра тяжести) эллиптического однородного кольца, заключенного между двумя гомотетическими эллипсами с полуосями a, b и qa, qb ($q < 1$), равны соответственно $b\frac{\sqrt{1+q^2}}{2}$, $a\frac{\sqrt{1+q^2}}{2}$ (для $b = a$ см. упражнение 25).

29. В однородном (прямом) круговом конусе высота равна половине радиуса основания. Доказать, что эллипсоид инерции относительно вершины есть шар.

30. Пусть σ есть меридианное сечение какого-нибудь тела вращения, не пересекаемое осью вращения Oz; G_0 — центр тяжести сечения; $G_0\zeta$ — ось, проходящая через центр тяжести сечения параллельно оси вращения; R — расстояние от G_0 до оси вращения; x — расстояние любого элемента $d\sigma$ от оси;

ξ — абсцисса элемента $d\sigma$ (расстояние, отсчитываемое с надлежащим знаком) относительно осей $G_0\xi\zeta$ с началом в центре тяжести.

Если обозначим через μ плотность тела, предполагаемого однородным, то часть его, образованная вращением любого элемента $d\sigma$, очевидно, имеет момент инерции

$$2\pi\mu x^3\, d\sigma.$$

Следовательно, момент инерции тела равен

$$I = 2\pi\mu \int_\sigma x^3\, d\sigma$$

или

$$I = 2\pi\mu \int_\sigma (R+\xi)^3\, d\sigma.$$

Далее, предполагая, что G_0 является осью симметрии для площади σ и припоминая теорему Гюльдена (п. 17), доказать, что

$$I = m\,(R^2 + 3\delta_0^2),$$

где m есть масса тела, а δ_0 — радиус инерции сечения σ относительно прямой $G_0\zeta$ (параллельной оси вращения и проведенной через центр тяжести).

31. Для тела вращения, ось симметрии которого принимается за ось Oz, имеем (п. 25) $s_1 = s_2$ и, следовательно, при обозначениях предыдущего упражнения,

$$s_1 = s_2 = \frac{1}{2} I.$$

Выражение для суммы $s_3 = \sum_i m_i z_i^2$ (так как координата z любого элемента $d\sigma$ одинакова для всей части, образованной вращением этого элемента) можно написать в виде

$$s_3 = 2\pi\mu \int_\sigma z^2 x\, d\sigma.$$

Предположим, что за плоскость Oxy принята плоскость, содержащая центр тяжести меридианного сечения; тогда ось x будет совпадать с осью ξ и мы будем иметь

$$s_3 = 2\pi\mu \int_\sigma z^2 (R+\xi)\, d\sigma.$$

Считая и здесь, что $G_0\zeta$ является осью симметрии для σ, и обозначая через δ_0' центральный радиус инерции сечения σ относительно $G_0\xi$ (перпендикуляр к оси вращения), будем иметь

$$s_3 = m\delta_0'^2.$$

Отсюда получаем следующее правило:

Пусть S есть однородное тело вращения, меридианное сечение которого σ имеет ось симметрии, параллельную оси вращения. Пусть δ и δ' — радиусы инерции тела S относительно оси вращения и некоторой (какой угодно) перпендикулярной к ней прямой, проведенной через центр тяжести тела. Их можно выразить через радиусы инерции δ_0 и δ_0' площади мери-

дианного сечения σ относительно осей, проходящих через центр тяжести сечения, из которых одна параллельна, а другая перпендикулярна к оси вращения, по формулам

$$\delta^2 = R^2 + 3\delta_0^2,$$

$$\delta'^2 = \frac{1}{2}\delta^2 + \delta_0'^2 = \frac{1}{2}R^2 + \frac{3}{2}\delta_0^2 + \delta_0'^2,$$

где R есть средний радиус (расстояние от центра тяжести любого сечения до оси вращения),

N. B. В упражнениях 32—36 δ и δ' имеют только что указанное значение и тела предполагаются однородными.

32. Доказать, что для цилиндра (R — радиус, h — высота) имеем

$$\delta^2 = \frac{R^2}{2}$$

(как это уже было получено в п. 33) и

$$\delta'^2 = \frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12}.$$

33. Доказать, что для полого цилиндра (R_1, R_2 — радиусы внешней и внутренней стенок, h — высота) имеем

$$\delta^2 = \frac{R_1^2 + R_2^2}{2}, \qquad \delta'^2 = \frac{R_1^2 + R_2^2}{4} + \frac{h^2}{12}.$$

34. Доказать, что для тора (R — средний радиус, r — радиус образующего круга) имеем

$$\delta^2 = R^2 + \frac{3}{4}r^2, \qquad \delta'^2 = \frac{1}{2}R^2 + \frac{5}{8}r^2.$$

35. Доказать, что для кольца с эллиптическим сечением (R — средний радиус, a и b — полуоси сечения, вторая из которых параллельна оси вращения) (ср. пример 27) имеем

$$\delta^2 = R^2 + \frac{3}{4}a^2, \qquad \delta'^2 = \frac{1}{2}R^2 + \frac{3}{8}a^2 + \frac{1}{4}\delta^2.$$

36. Представим себе, что параболоид вращения пересечен плоскостью, перпендикулярной к оси. Пусть R есть радиус сечения. Доказать, что для соответствующей части параболоида имеем $\delta = R/\sqrt{3}$.

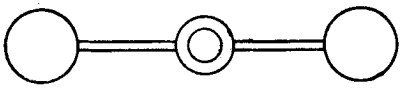
37. Маховое колесо состоит из *втулки* (сквозь которую проходит вал), *обода* и шести *спиц* (расположенных радиально на расстоянии 60°), соединяющих втулку с ободом.

Среднее сечение (плоскостью, перпендикулярной к валу) втулки ограничено двумя окружностями с радиусами $r_1 = 40$ *см*, $r_2 = 20$ *см*; сечение обода ограничено двумя окружностями с радиусами $R_1 = 2$ *м*, $R_2 = 1{,}80$ *м*; толщина (нормальная к плоскости сечения) как втулки, так и обода равна 40 *см*. Спицы представляют собой цилиндры с радиусами 8 *см* и высотой $R_2 - r_1 = 1{,}40$ *м*. Удельный вес материала (предполагаемого однородным) равен 7,5.

Вычислить момент инерции I махового колеса относительно оси вращения.

Ответ: $I = 2835{,}12$ *кг · м · сек*^{2}. Выразить I_0 в системе CGS.

38. Два стальных шара (однородных и равных между собой) соединены посредством двух цилиндрических стержней (однородных, равных и соосных) со втулкой (однородной) в виде тора, которая может вращаться вокруг вала (фиг. 23). Среднее сечение, нормальное к оси, имеет вид, представленный на фигуре.



Фиг. 23.

Радиусы шаров равны 10 *см*, радиусы цилиндрических стержней — 1 *см*, длины стержней — 40 *см*. Средний радиус сечения втулки равен 6,5 *см*, радиус меридианного сечения втулки — 1,5 *см*. Стержни и втулка сделаны из дерева. Удельный вес стали 7,6, удельный вес дер[illegible] числить момент инерции системы относительно оси вращен[illegible]

Ответ: $I = 2{,}21$ *кг · м · сек*^{2}.