размерность силы ($lt^{-2}m$), то размерность f определится равенством

$$[f] = l^3 t^{-2} m^{-1}.$$

3. Первое определение постоянной f путем прямого лабораторного опыта было сделано Кэвендишем (1797)[1]). Впоследствии для определения f были применены другие, более точные способы. Все они дают для f численное значение (в круглых цифрах) $6{,}7 \cdot 10^{-8}$ (в системе CGS), т. е. 67 миллиардных долей дины, равное $6{,}7 \cdot 10^{-8}/980$ *г*, или около $6{,}7 \cdot 10^{-11}$ *г*[2]).

Ввиду крайней малости этого числа притяжение $f\frac{mm_1}{r^2}$ двух масс может стать ощутимым только тогда, когда будет очень большим произведение mm_1 или же очень малым знаменатель r^2. Первый случай имеет существенное значение для астрономии, второй встречается в молекулярных явлениях (которые, впрочем, в отличие от астрономических явлений нельзя рассматривать, пользуясь только законом всемирного тяготения, так как необходимо учитывать и многие другие элементы). При значениях m, m_1 и r, встречающихся в обычных практических задачах, можно, очевидно, не принимать во внимание влияние взаимного притяжения. Это, конечно, будет справедливо до тех пор, пока обе массы будут иметь величину обычных предметов; но этого нельзя делать, когда одна из них представляет собой массу Земли. В этом случае, напротив, необходимо учитывать ньютоново притяжение Земли: оно, как это будет разъяснено в дальнейшем (гл. XVI), определяет, хотя и не вполне, но в существенной части, вес тела.

§ 2. Потенциал

4. Если даны две материальные точки P и Q, то по закону Ньютона они испытывают равные и прямо противоположные притяжения. Очень часто приходится рассматривать только одно из них, например, притяжение, испытываемое точкой P. Тогда обнаруживается различная роль, приписываемая обеим точкам Q и P. Мы будем называть Q *притягивающей точкой* (или притягивающей массой) и P — *притягиваемой точкой*.

---

[1]) Кэвендиш Генри родился в Ницце в 1731 г., умер в Лондоне в 1810 г. Был членом Лондонского королевского общества и членом Французской академии наук.

Доклад о его опытах над притяжением тел был опубликован под названием «Experiments to determine the density of the Earth» (Philosophical Transactions, 1798).

[2]) Новейшие определения указывают для f численное значение $6{,}664 \cdot 10^{-8}$. См., например, доклад: P. R. Heyl, Proc. of the National Academy of Sciences, т. 13, Вашингтон, 1927.

Легко убедиться, что притяжение точки P точкой Q, рассматриваемое в зависимости от положения точки P, является консервативной силой. Достаточно заметить, что мы имеем дело с центральной силой, так как линия действия силы притяжения должна постоянно проходить через точку Q (положение которой не зависит от положения, или, что одно и то же, от координат точки P); величина $f\frac{mm_1}{r^2}$ является, очевидно, функцией только расстояния r точки P от центра притяжения.

Так как сила является притягивающей, то ее радиальная проекция (т. е. проекция на направление QP) имеет значение $-f\frac{mm_1}{r^2}$. Это и есть та функция от r, которую мы обозначали через $\varphi(r)$, рассматривая центральные силы в общем случае [гл. VII, п. 29, в]. Мы видели тогда, что потенциал U есть не что иное, как неопределенный интеграл от функции $\varphi(r)$; поэтому в настоящем случае, с точностью до несущественной аддитивной постоянной, мы будем иметь

$$U=f\frac{mm_1}{r}.$$

Отметим, что мы придем, очевидно, к тому же самому выражению, если переменим роли точек P и Q.

Поэтому потенциал U, рассматриваемый как функция от координат точки P, определяет проекции силы притяжения, испытываемой точкой P; наоборот, если потенциал рассматривать как функцию от координат точки Q, он определит проекции притяжения, испытываемого точкой Q.

Все это можно доказать формально, вводя координаты x, y, z точки P и x_1, y_1, z_1 точки Q, после чего мы будем иметь

$$r=\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2};$$

выполнив дифференцирование U по различным аргументам, получим

$$\frac{\partial U}{\partial x}=-\frac{\partial U}{\partial x_1}=-f\frac{mm_1}{r^2}\frac{x-x_1}{r},$$
$$\frac{\partial U}{\partial y}=-\frac{\partial U}{\partial y_1}=-f\frac{mm_1}{r^2}\frac{y-y_1}{r},$$
$$\frac{\partial U}{\partial z}=-\frac{\partial U}{\partial z_1}=-f\frac{mm_1}{r^2}\frac{z-z_1}{r}.$$

В последних частях этих равенств стоят проекции вектора длиной $f\frac{mm_1}{r^2}$ с направляющими косинусами $(x_1-x)/r$, $(y_1-y)/r$, $(z_1-z)/r$; эти направляющие косинусы и показывают, что мы имеем здесь дело с притяжением, испытываемым точкой P. Приравняв эти проекции соответственно первым или вторым частям равенств, мы и получим формальное доказательство высказанных выше утверждений.

5. В дальнейшем мы будем рассматривать P только как притягиваемую точку и будем предполагать, что имеется какое угодно число притягивающих точек Q_i $(i=1, 2, \ldots, n)$; обозначив через m_i массу точки Q_i, через x_i, y_i, z_i ее координаты, через r_i ее расстояние от точки P, мы будем иметь для каждого из испытываемых этой точкой притяжений потенциал $f\frac{mm_i}{r_i}$ и, следовательно, для результирующей силы потенциал, определяемый суммой

$$f\frac{mm_1}{r_1}+f\frac{mm_2}{r_2}+\ldots+f\frac{mm_n}{r_n}=fm\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{r_i}.$$

Обычно (см. замечание из гл. VII, п. 24, по поводу любого силового поля) отвлекаются от множителя m и называют *ньютоновым потенциалом* (потенциалом притяжения, испытываемого точкой P от притягивающих масс m_1, m_2, $\ldots$, m_n) функцию

$$U=f\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{r_i}, \tag{1}$$

которая, очевидно, является *единичным* потенциалом, т. е. потенциалом силы, которую испытывала бы единичная масса, помещенная в положение P.

Функция U, рассматриваемая как функция от координат x, y, z точки P, очевидно, будет *конечной* и *непрерывной* для всех значений аргументов, при которых не обращается в нуль ни один из знаменателей r_i, *т. е. для всех точек пространства, за исключением притягивающих точек* Q_i. Когда точка P приближается к какой-нибудь одной из точек Q_i, то один (и только один) из знаменателей r_i стремится к нулю и функция $U(x, y, z)$ вследствие этого неограниченно возрастает.

Очень легко показать, что производные от U какого угодно порядка тоже непрерывны во всякой точке, за исключением точек Q_i. Это имеет место, в частности, для первых производных, или проекций силы притяжения, что следует также из закона обратной пропорциональности квадратам расстояний.

6. Для всякой системы значений x, y, z, за исключением значений x_i, y_i, z_i, остаются в силе обычные правила дифференцирования. Применяя их к функции $1/r_i$, последовательно найдем

$$\frac{\partial\frac{1}{r_i}}{\partial x}=-\frac{x-x_i}{r_i^3},\qquad \frac{\partial^2\frac{1}{r_i}}{\partial x^2}=-\frac{1}{r_i^3}+\frac{(x-x_i)^2}{r_i^5}$$

и аналогичные формулы для переменных y и z. Складывая три вторых производных и принимая во внимание, что

$$(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2$$

есть не что иное, как r_i^2, тождественно получим

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{r_i}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \frac{1}{r_i}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \frac{1}{r_i}}{\partial z^2}=0.$$

Отсюда для потенциала U тотчас же получится уравнение

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=0, \tag{2}$$

представляющее собой уравнение с частными производными второго порядка; потенциал $U(x, y, z)$ удовлетворяет этому уравнению в каждой правильной точке (т. е. во всякой точке, в которой функция U и ее производные остаются конечными и непрерывными), или, иначе, в точке, отличной от притягивающих масс.

Уравнение (2) обычно пишется в сокращенной форме

$$\Delta_2 U=0, \tag{2'}$$

где через Δ_2 обозначен дифференциальный оператор

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

применяемый к любой функции от x, y, z. Оно называется уравнением Лапласа[1]) и имеет основное значение не только для теории потенциала, но также и для других областей чистого и прикладного анализа.

7. Все предыдущее распространяется со случая конечного числа притягивающих материальных точек на случай (более соответствующий действительности) масс, непрерывно распределенных внутри некоторой области трех, двух или одного измерения, т. е. на случай материального тела, поверхности или линии C.

Представим себе, как обычно, тело C разделенным на части ΔC, каждая из которых рассматривается как материальная точка с массой Δm, локализованной в какой-либо геометрической точке Q области пространства, занятой частью ΔC тела.

---

[1]) Лаплас Пьер Симон родился в 1749 г. в маленьком городке Бомоне на северо-западе Франции, умер в Париже в 1827 г. Известен не только результатами, полученными им в небесной механике и в различных областях математической физики (в частности, в акустике, в теории капиллярности и в электромагнетизме), но также своими трактатами по небесной механике (в пяти томах) и по теории вероятностей и произведениями: „Exposition du Système du mond“ (в двух томах) и „Essai philosophique sur les probabilités“.

Обозначим через r расстояние точки Q от притягиваемой точки P (которая, конечно, предполагается *внешней* для области S, занятой телом C и, следовательно, отличной от любой точки Q) и рассмотрим сумму

$$f\sum\frac{\Delta m}{r},$$

распространенную на различные части ΔC.

Если введем плотность μ (которую надо считать, как обычно, конечной и, вообще говоря, непрерывной функцией от точек области S), то, как известно, интеграл

$$U=f\int_S\frac{\mu}{r}\,dS, \tag{3}$$

распространенный на область S, представляет собой предел, к которому стремится сумма $f\sum\frac{\Delta m}{r}$, когда число частей ΔC, на которые мы делим тело, стремится к бесконечности по какому-нибудь закону, а объем ΔS каждой части стремится к нулю. Обоснование этого определения по существу тождественно с тем, которое было дано при выводе формул, определяющих положение центра тяжести (гл. X, п. 15), а также при вычислении моментов инерции (гл. X, п. 31). Достаточно, чтобы была определена плотность и чтобы функция под знаком интеграла, т. е. в настоящем случае функция μ/r, была интегрируема. Если ограничиться, как мы условились, притягиваемыми точками P, внешними для области S (вследствие чего r остается всегда >0), то можно утверждать, что μ/r является интегрируемой функцией, так как оба множителя μ и $1/r$ интегрируемы; последний является, кроме того, конечной, непрерывной и дифференцируемой функцией как координат ξ, η, ζ любой притягивающей точки Q (по которым должно выполняться интегрирование), так и координат x, y, z притягиваемой точки P.

Далее, если мы будем рассматривать интеграл $\int_S\frac{\mu}{r}dS$ как функцию от координат x, y, z точки P (которые входят в подинтегральную функцию в виде параметров), то можно утверждать, что интеграл представляет собой функцию конечную, непрерывную и сколько угодно раз дифференцируемую; так как, кроме того, пределы области интегрирования не зависят от параметров x, y, z (потому что при изменении P область S остается неизменной), то можно еще применить правило *дифференцирования под знаком интеграла* и, принимая во внимание, что μ есть функция точки Q и не зависит от x, y, z, написать

$$\frac{\partial U}{\partial x}=f\int_S\mu\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\,dS \tag{4}$$

и аналогичные формулы для двух других координат; на таком же основании можно выполнять и дальнейшие дифференцирования. В частности, уравнение (2′) принимает при этом вид

$$\Delta_2 U \equiv f \int\limits_S \mu \Delta_2 \frac{1}{r}\, dS = 0.$$

Таким образом, дело обстоит так, как если бы функция U была суммой конечного числа слагаемых: в этом последнем случае имеет место элементарное правило, заключающееся в том, что производная от суммы равна сумме производных от отдельных слагаемых.

Подобно тому, как потенциал U является пределом, к которому стремится сумма $f\sum \frac{\Delta m}{r}$, когда неограниченно уменьшаются части ΔC, так и интеграл, стоящий в правой части равенства (4), является пределом суммы

$$f \sum \Delta m \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x},$$

представляющей собой проекцию на ось x полного притяжения различных частей ΔC, рассматриваемых как материальные точки. Полученный таким образом предел (при любом законе деления на части, лишь бы оно продолжалось до бесконечности) можно рассматривать как соответствующую проекцию полного притяжения, действующего на точку P со стороны масс, непрерывно распределенных внутри области S. Отсюда имеем правило:

Для всякой притягиваемой точки P, внешней для области S, занятой притягивающими массами, проекции силы притяжения равны (как и в случае конечного числа притягивающих масс) *соответствующим производным от потенциала U, выражающегося в виде*

$$U = f \int\limits_S \frac{\mu}{r}\, dS;$$

это выражение для U совпадает с выражением для потенциала в случае конечного числа притягивающих точек [равенство (1)], *за исключением лишь того, что сумма заменена здесь интегралом.*

8. Возвращаясь опять к случаю конечного числа притягивающих масс $Q_i (i = 1, 2, \ldots, n)$, вспомним (п. 5), что потенциал и сила притяжения безгранично возрастают, когда притягиваемая точка P приближается к одной из точек Q_i.

В случае массы, распределенной непрерывно внутри некоторой области S (одного, двух или трех измерений), сама собой возникает задача исследовать, что̀ происходит, когда притягиваемая точка P неограниченно приближается к области S или находится внутри этой области.

Существенная разница, по сравнению с рассмотренным только что случаем точки P, внешней относительно тела (т. е. относительно области, занятой притягивающими массами), состоит в том, что функция μ/r под знаком интеграла в выражении потенциала U обращается в бесконечность в точке P, если P является внутренней для S, или стремится к бесконечности, если точка P (предполагаемая внешней) неограниченно приближается к телу. Необходимо поэтому исследовать, как влияет особая точка, которую имеет подинтегральная функция, на потенциал U, на его производные, на проекции X, Y, Z силы притяжения, на соотношения

$$X=\frac{\partial U}{\partial x}, \qquad Y=\frac{\partial U}{\partial y}, \qquad Z=\frac{\partial U}{\partial z},$$

которые имеют место, когда речь идет о внешних точках, и т. д.

На все эти важные вопросы исчерпывающим образом отвечает теория потенциала[1])[*]). Чтобы привести здесь те соображения и результаты, к которым при этом приходят, предпошлем некоторые сведения из анализа.

9. Несобственные интегралы. Обратимся сначала ради простоты к функции $f(x)$ от одного только переменного и предположим, что она остается конечной и непрерывной во всем закрытом интервале, от $x=a$ до $x=b$, за исключением лишь одной точки $x=c$, в которой она становится бесконечно большой. Если мы около точки $x=c$ рассмотрим интервал $(c-\delta,\ c+\delta')$, расположенный внутри заданного интервала, то функция $f(x)$ будет конечной и непрерывной, а следовательно, и интегрируемой от $x=a$ до $x=c-\delta$ и от $x=c+\delta'$ до $x=b$, так что сумма двух интегралов

$$\int_a^{c-\delta} f(x)\,dx+\int_{c+\delta'}^{b} f(x)\,dx \tag{5}$$

окажется вполне определенной и конечной. Если эта сумма стремится к конечному и определенному пределу при всяком одновременном стремлении к нулю δ и δ', то этот предел называется несобственным интегралом от a до b функции $f(x)$ и обозначается символом

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

---

1) См., например, Betti, Teorica delle forze newtoniane, Пиза, 1879, гл. I; Poincaré, Théorie du potentiel newtnien, Париж, 1889, гл. I — III, или еще Appell, Traité de mécanique rationelle, т. III, 3-е изд., Париж, 1921, гл. XXIX; Аппелль П., Руководство теоретической механики, т. III, гл. XXIX, 1911.

*) Идельсон Н. И., Теория потенциала с приложениями к теории фигуры Земли и геофизике, Ленинград, 1936; Сретенский Л. Н., Теория ньютоновского потенциала, Москва, 1946. (*Прим. ред.*)

Аналогично определяется и интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, когда функция $f(x)$ обращается в бесконечность при значениях $x=a$ или $x=b$; это определение распространяется и на более общий случай интеграла по области одного, двух или трех измерений функции $f(Q)$ переменной точки Q, когда функция остается конечной и непрерывной во всей области интегрирования, за исключением одной точки P, где она обращается в бесконечность. Если для определенности речь будет идти об области S трех измерений, то мы будем представлять себе около точки P, внутри S, малую область γ, например сферу с центром в P с достаточно малым радиусом δ, и рассмотрим область S^*, которая получится из S в результате вычитания области γ. Внутри S^* функция $f(Q)$ остается конечной и непрерывной, так что остается определенным и конечным интеграл по области

$$\int\limits_{S^*} f(Q)\,dS. \tag{5'}$$

Если этот интеграл стремится к конечному и определенному пределу, как бы ни уменьшалась неограниченно область около точки P, то этот предел называется несобственным интегралом от $f(Q)$ в области S и обозначается символом

$$\int\limits_S f(Q)\,dS.$$

10. Предыдущие интегралы имеют смысл только при условии, что предел интеграла (5) или аналогичного интеграла (5′) является определенным. При этом нет необходимости указывать общий признак, позволяющий определить во всяком случае, на основании поведения функции f в особой точке, существует или не существует этот предел, т. е. несобственный интеграл. Достаточно, как и для сходимости рядов, иметь признаки, приложимые к различным частным случаям.

Наиболее простым и наиболее полезным для нашей цели признаком является следующий. Функция $f(Q)$, остающаяся конечной и непрерывной во всей области S, за исключением лишь одной точки P, где она обращается в бесконечность[1]), будет интегрируемой в этой области, если в точке P она обращается в бесконечность порядка *не выше* m, где m есть число, *меньшее* 3, 2 или 1, в зависимости от того, будет ли область интегрирования

[1]) О функции $f(Q)$ говорят, что она обращается в точке P в бесконечность порядка *не выше* m, если произведение $r^m f(Q)$, где r есть расстояние QP, остается конечным при стремлении Q к P, и обращается в бесконечность порядка m, если это произведение стремится к конечному и отличному от нуля пределу.

трех, двух или одного измерения. В противоположность этому, если функция $f(Q)$ обращается в P в бесконечность порядка не ниже 3, 2 или 1, в зависимости от размерности области S, то она будет наверное неинтегрируемой в этой области. Если же о порядке бесконечности функции $f(Q)$ в точке P известно только, что он не превышает 3, 2 или 1 в зависимости от рассматриваемого случая, то ничего нельзя сказать об интегрируемости функции, если не обратиться к какому-нибудь другому, более точному признаку.

Так, например, интеграл

$$\int_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}\,dx}{x}$$

существует и является вполне определенным, тогда как интеграл

$$\int_0^1 \frac{\sin^2\frac{1}{x}\,dx}{x}$$

не имеет смысла, хотя в обоих случаях рассматриваются функции, которые при $x=0$ имеют бесконечность порядка не выше 1.

11. Дифференцирование под знаком интеграла. Пусть функция f зависит, помимо переменной точки, изменяющей свое положение в области S, еще от некоторого параметра λ, изменяющегося в некотором промежутке Λ. Если она является конечной и непрерывной как относительно Q в S, так и относительно λ в Λ, то интеграл

$$I=\int_S f(Q|\lambda)\,dS \tag{6}$$

будет функцией от λ, непрерывной во всем промежутке Λ; если, кроме того, существует производная $\partial f/\partial\lambda$, которая является также конечной и непрерывной функцией относительно Q в S и относительно λ в Λ, то существует также интеграл

$$\int_S \frac{\partial f}{\partial\lambda}\,dS$$

и оказывается справедливым так называемое правило дифференцирования под знаком интеграла, поскольку мы имеем, что

$$\int \frac{\partial f}{\partial\lambda}\,dS=\frac{dI}{d\lambda}. \tag{7}$$

Предыдущие результаты при подходящих условиях распространяются также и на случай, когда функция $f(Q|\lambda)$ при некотором значении λ_0 параметра λ обращается в точке P внутри области S в бесконечность.

Именно, предположим, что функция $f(Q|\lambda)$ является интегрируемой внутри области S (п. 10), каково бы ни было значение параметра λ в промежутке Δ; предположим, кроме того, что если точка P находится в некоторой сколько угодно малой области γ, внутренней для S, то функция $f(Q|\lambda)$ остается конечной и непрерывной, как бы ни изменялось положение точки P внутри области $S^* = S - \gamma$.

При этих предположениях интеграл (6) все еще будет определенной и непрерывной функцией от λ в промежутке Δ. Если, далее, существует производная $\partial f/\partial\lambda$ и обладает теми же только что допущенными для функции f свойствами, то будет иметь силу равенство (7), т. е. к равенству (6) можно приложить правило дифференцирования под знаком интеграла; таким образом, и в этом случае будет справедливо равенство (7) во всем промежутке Δ.

12. Предыдущие теоремы непосредственно применяются к потенциалу Ньютона.

Рассмотрим прежде всего потенциал некоторого трехмерного распределения материи

$$U(x, y, z) = f\int_S \frac{\mu\, dS}{r}.$$

Очевидно, что если притягиваемая точка $P(x, y, z)$ совпадает или стремится к совпадению с некоторой точкой $Q(\xi, \eta, \zeta)$ притягивающего тела, то подинтегральная функция обращается в бесконечность; но так как порядок бесконечности равен 1 (т. е. меньше 3), то, как мы уже знаем (п. 10), подинтегральная функция остается интегрируемой и потенциал U будет конечным и непрерывным не только вне притягивающей массы, но также и на поверхности и внутри нее. Кроме того, внутри области S существуют также и частные производные от функции μ/r по координатам x, y, z притягиваемой точки; если точка является внутренней для тела C, то частные производные обращаются в ней в бесконечность порядка не выше 2, тогда как во всем остальном теле они остаются конечными и непрерывными. Отсюда заключаем (п. 11), что потенциал U представляет собой дифференцируемую и потому непрерывную функцию не только вне притягивающей массы, но также на поверхности и внутри нее; производные потенциала также будут непрерывными функциями и получатся путем дифференцирования под знаком интеграла, т. е. определятся формулами (4) п. 7.

Если мы перейдем ко вторым производным от функции μ/r по координатам x, y, z точки P, то на основании п. 6 увидим, что если P будет совпадать с какой-нибудь точкой Q притягивающей массы, то производные обратятся в бесконечность порядка, не превышающего 3, так что мы сталкиваемся здесь с одним из тех случаев, когда, согласно критерию п. 10, интегрируемость остается сомнительной. Мы ограничимся здесь лишь утверждением, что эти вторые производные от потенциала по x, y, z существуют и непрерывны внутри притягивающей массы, если непрерывна плотность μ; но их нельзя получить путем дифференцирования под знаком интеграла, и они обнаруживают разрывы при переходе через границу.

13. Если, далее, мы будем рассматривать потенциал U поверхностного распределения материи, то, как и выше, увидим, что он будет конечным и непрерывным в точках поверхности, благодаря тому что функция μ/r при совпадении притягиваемой точки $P(x, y, z)$ с точкой $Q(\xi, \eta, \zeta)$ притягивающей поверхности остается все еще бесконечно большой величиной первого порядка. Но здесь, вследствие того, что речь идет об интеграле по области двух измерений, на основании критерия п. 10 уже для производных первого порядка от подинтегральной функции будет иметь место сомнительный случай интегрируемости, так как эти производные при совпадении точки P с Q обращаются в бесконечность порядка не выше 2. Подобно тому, как мы поступили выше, в п. 12, мы ограничимся и здесь утверждением, что первые производные от U существуют даже тогда, когда притягиваемая точка безгранично приближается к притягивающей поверхности или лежит на ней, но представляют разрывы при переходе через поверхность и не могут получиться прямым дифференцированием под знаком интеграла.

Наконец, в случае материальной линии l критерий п. 10 показывает, что потенциал

$$U = f \int\limits_{l} \frac{\mu}{r}\, ds$$

обращается в бесконечность на притягивающей линии, поскольку речь идет об одномерном интеграле от функции, которая внутри области интегрирования обращается в бесконечность первого порядка.

14. Обычная физическая интерпретация аналитических выводов, полученных выше, позволяет дополнить результат п. 7.

Для определенности обратимся к наиболее интересному и ясному случаю трехмерного распределения материи и попытаемся отдать себе отчет о притяжении телом C точки P (единичной массы), расположенной внутри него (или на поверхности). Заключим точку P в малый объем γ, внутренний для пространственной области S, занятой телом C, например в маленькую сферу (или часть ее) с центром в P и с достаточно малым радиусом δ, и обозначим через C^* тело, которое получится после удаления из тела C маленькой части его γ. Областью, занимаемой телом C^*, будет $S^* = S - \gamma$. Сила притяжения, с которой C^* действует на P, на основании п. 7 имеет проекции

$$f\int\limits_{S^*}\mu\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}dS,\quad f\int\limits_{S^*}\mu\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}dS,\quad f\int\limits_{S^*}\mu\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}dS.$$

Если мы будем приближать объем γ к нулю, стягивая его в точку P, то проекции силы притяжения будут стремиться к интегралам по области S, т. е. к интегралам

$$f\int\limits_{S}\mu\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}dS,\quad f\int\limits_{S}\mu\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}dS,\quad f\int\limits_{S}\mu\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}dS; \tag{8}$$

это будет иметь место, какова бы ни была форма полости γ, которую мы должны представлять себе в S, и каким бы способом мы ни заставляли ее стремиться к точке P. Если теперь представим себе, что при этом переходе к пределу, вводя последовательно все новые и новые материальные элементы тела C, придется исчерпать их все, то физически окажется оправданным рассмотрение выражений (8) как проекций силы притяжения, действующей на P от целого тела.

В заключение, учитывая также результат, сформулированный в конце п. 7, мы можем сказать, что для любой притягиваемой точки (масса которой равна единице), будет ли она внешней или внутренней для притягивающего тела (или находящейся на его поверхности), проекции силы притяжения, действующей на нее, будут производными по координатам точки от потенциала

$$U(x, y, z)+f\int\limits_{S}\frac{\mu}{r}dS.$$

Речь идет, следовательно, о консервативной силе, которая является (векторной) непрерывной функцией от притягиваемой точки во всем пространстве.

§ 3. Приложения

15. Изложенного в предыдущих пунктах достаточно для действительного определения потенциала в некоторых простых случаях, которые, впрочем, являются наиболее важными для механических приложений.