через C^* тело, которое получится после удаления из тела C маленькой части его γ. Областью, занимаемой телом C^*, будет $S^* = S - \gamma$. Сила притяжения, с которой C^* действует на P, на основании п. 7 имеет проекции

$$f \int_{S^*} \mu \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dS, \quad f \int_{S^*} \mu \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} dS, \quad f \int_{S^*} \mu \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} dS.$$

Если мы будем приближать объем γ к нулю, стягивая его в точку P, то проекции силы притяжения будут стремиться к интегралам по области S, т. е. к интегралам

$$f \int_{S} \mu \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dS, \quad f \int_{S} \mu \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} dS, \quad f \int_{S} \mu \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} dS; \tag{8}$$

это будет иметь место, какова бы ни была форма полости γ, которую мы должны представлять себе в S, и каким бы способом мы ни заставляли ее стремиться к точке P. Если теперь представим себе, что при этом переходе к пределу, вводя последовательно все новые и новые материальные элементы тела C, придется исчерпать их все, то физически окажется оправданным рассмотрение выражений (8) как проекций силы притяжения, действующей на P от целого тела.

В заключение, учитывая также результат, сформулированный в конце п. 7, мы можем сказать, что для любой притягиваемой точки (масса которой равна единице), будет ли она внешней или внутренней для притягивающего тела (или находящейся на его поверхности), проекции силы притяжения, действующей на нее, будут производными по координатам точки от потенциала

$$U(x, y, z) + f \int_S \frac{\mu}{r} dS.$$

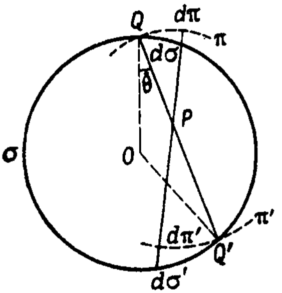
Речь идет, следовательно, о консервативной силе, которая является (векторной) непрерывной функцией от притягиваемой точки во всем пространстве.

§ 3. Приложения

15. Изложенного в предыдущих пунктах достаточно для действительного определения потенциала в некоторых простых случаях, которые, впрочем, являются наиболее важными для механических приложений.

16. Притяжение однородной сферической поверхности. Прежде всего рассмотрим силу притяжения, действующую на точку P, внутреннюю для сферы, ограниченной притягивающей поверхностью σ (фиг. 24). Пусть $d\sigma$ есть любой элемент поверхности этой сферы, Q — точка, внутренняя для элемента. Обозначая через ν поверхностную плотность (по предположению, постоянную), можно будет самый элемент уподобить материальной точке, совпадающей с Q, с массой $\nu\, d\sigma$ (конечно, с точностью до бесконечно малых порядка, высшего, чем порядок $d\sigma$).

Если мы рассмотрим элементарный конус с основанием $d\sigma$ и с вершиной в точке P, то соответствующие образующие, продолженные за вершину P, вторично пересекут сферическую поверхность по контуру элементарной площадки $d\sigma'$; если мы обозначим через Q' точку пересечения со сферой прямой PQ, находящуюся по другую сторону от P по сравнению с Q, то элемент $d\sigma'$ можно рассматривать как другую материальную точку, помещенную в Q' и с массой $\nu\, d\sigma'$.



Фиг. 24.

Далее легко установить, что силы притяжения, действующие на точку P со стороны двух элементов $d\sigma$ и $d\sigma'$, уравновешиваются (по крайней мере, с точностью до бесконечно малых порядка, высшего, чем $d\sigma$ или $d\sigma'$). Эти силы имеют (по крайней мере, с точностью до бесконечно малых указанного порядка) прямо противоположные направления; поэтому все сводится к тому, чтобы доказать равенство двух абсолютных величин $f\nu\, d\sigma/r^2$ и $f\nu\, d\sigma'/r'^2$ сил, где через r и r' обозначены расстояния точки P от точек Q и Q'. Для этой цели представим себе две сферы π и π', описанные из центра P радиусами r и r' и проходящие соответственно через точки Q и Q', и обозначим через $d\pi$ и $d\pi'$ элементы площади (окружающие Q и Q'), которые будут вырезаны из этих сфер конусами, проектирующими элементы $d\sigma$ и $d\sigma'$ из P. Элементы $d\pi$ и $d\pi'$, как подобные элементы двух сфер с радиусами r и r', относятся как квадраты радиусов, так что

$$\frac{d\pi}{r^2} = \frac{d\pi'}{r'^2}. \tag{9}$$

Кроме того, все рассматриваемые сферические элементы $d\sigma$, $d\sigma'$, $d\pi$, $d\pi'$ (по крайней мере, с точностью до бесконечно малых высшего порядка по отношению к площадям) можно уподобить плоским элементам, в частности элементам касательных плоскостей в точках Q и Q' к сферам σ, π и π'; с другой стороны, так как различные радиусы (выходящие из P), проектирующие $d\sigma$ и $d\sigma'$, пересекают контуры элементов $d\pi$ и $d\pi'$ под прямыми углами, то

$d\pi$ и $d\pi'$ можно рассматривать как прямоугольные проекции элементов $d\sigma$ и $d\sigma'$ на плоскости, касательные соответственно к сферам π и π' в точках Q и Q'. Далее, угол между двумя касательными плоскостями к элементам $d\sigma$ и $d\pi$ или к элементам $d\sigma'$ и $d\pi'$ равен углу между соответствующими нормалями, т. е. между радиусами двух сфер σ и π или σ' и π', идущими соответственно к Q или Q'. На фиг. 24, если обозначим через O центр сферы σ, это будут углы $\widehat{OQP}$ и $\widehat{OQ'P}$, которые, как углы при основании равнобедренного треугольника OQQ', равны между собой. Поэтому если обозначим через θ общую величину углов $\widehat{OQP}$ и $\widehat{OQ'P}$, то будем иметь

$$d\pi = d\sigma \cos\theta, \qquad d\pi' = d\sigma' \cos\theta;$$

равенство (9) можно будет после этого написать в виде

$$\frac{d\sigma}{r^2} = \frac{d\sigma'}{r'^2}.$$

Отсюда как раз и следует равенство

$$f\frac{\nu}{r^2}\,d\sigma = f\frac{\nu}{r'^2}\,d\sigma',$$

т. е. равенство абсолютных величин сил притяжения, действующих на точку P со стороны материальных элементов $d\sigma$ и $d\sigma'$, противоположных относительно P.

Теперь легко показать, что *полное притяжение однородной сферической поверхности равно нулю во всех точках, внутренних для сферы.*

Для определения этого результирующего притяжения достаточно представить себе, что каждому притягивающему элементу $d\sigma$ соответствует *противоположный* ему (относительно притягиваемой точки P) элемент $d\sigma'$, а затем составить (геометрическую) сумму элементарных составляющих силы притяжения, происходящих от всех таких пар элементов. Так как каждая из этих элементарных составляющих равна нулю (по крайней мере, с точностью до членов порядка, высшего, чем $d\sigma$), то интеграл (предел только что указанной геометрической суммы) будет (строго) равен нулю.

17. Вспоминая (п. 7), что проекции силы ньютонова притяжения суть не что иное, как производные от потенциала U, мы должны отсюда сделать вывод, что *во всем внутреннем для σ пространстве (где притяжение есть нуль) потенциал*

$$U = f\int_\sigma \frac{\nu\, d\sigma}{r}$$

имеет постоянное значение.

Для того чтобы определить это значение, достаточно подсчитать его для какой-нибудь отдельной точки, выбранной как угодно внутри сферы. Выберем в качестве такой точки центр; тогда расстояние r притягиваемой точки от любого притягивающего элемента $d\sigma$ будет постоянно и равно радиусу сферы, откуда следует, что

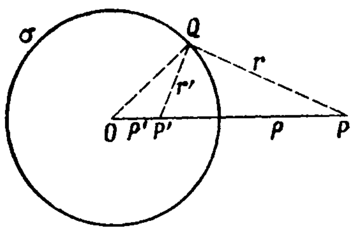
$$U=\frac{f}{R}\int\limits_{\sigma}\nu\,d\sigma$$

или, если заметить, что $\int\limits_{\sigma}\nu\,d\sigma$ есть не что иное, как полная масса m притягивающей сферической поверхности,

$$U=f\frac{m}{R}.$$

18. Перейдем теперь к случаю *внешней притягиваемой точки* и сделаем сначала одно замечание геометрического характера.

Пусть P (фиг. 25) есть точка, внешняя для сферической поверхности σ, ρ — расстояние точки P от центра O сферы. Пусть $\rho > R$ и, следовательно, если положим



Фиг. 25.

$$\rho\rho'=R^2,$$

$\rho' < R$. Если поэтому на отрезке OP рассматривается та точка P', которая отстоит от O на ρ', то можно быть уверенным, что P' находится внутри сферы.

Далее, обозначим через r и r' расстояния от P и P' до произвольной точки Q на поверхности σ. На основании соотношения $\rho\rho'=R^2$ общий угол треугольников QOP', POQ при вершине O оказывается заключенным между парами пропорциональных сторон. Эти треугольники, следовательно, подобны, и отношение между двумя соответственными сторонами $P'Q=r'$ и $QP=r$ равно отношению двух других соответственных сторон $OQ=R$ и $OP=\rho$.

Поэтому имеем

$$\frac{1}{r}=\frac{R}{\rho}\frac{1}{r'}. \tag{10}$$

19. После этого замечания возвратимся к притяжению сферической поверхностью σ точки P, внешней для сферы. Вместо силы здесь (как, впрочем, и в огромном большинстве случаев) удобнее определить прямо потенциал

$$U=f\int\limits_{\sigma}\frac{\nu\,d\sigma}{r}.$$

Используя соотношение (10) и принимая во внимание, что ρ и R не зависят от положения точки Q на поверхности σ, можно вынести их из-под знака интеграла; поэтому будем иметь

$$U=\frac{R}{\rho} f \int\limits_{\sigma} \frac{\nu\, d\sigma}{r'}.$$

Если задано значение r', то $f \int\limits_{\sigma} \frac{\nu\, d\sigma}{r'}$, очевидно, представляет собой потенциал притяжения сферы σ во внутренней точке P'. Ему можно приписать значение, найденное в п. 17, после чего получим

$$U=f\,\frac{m}{\rho}. \tag{11}$$

Это есть ньютонов потенциал (для притягиваемой точки P) некоторой массы m, расположенной в O; мы получили, таким образом, теорему:

Однородная сферическая поверхность действует на внешние точки так, как если бы вся масса ее была сосредоточена в центре сферы.

20. *Притяжение однородного сферического слоя и, в частности, сферы, состоящей из однородных концентрических слоев.* Пусть R_1 и R_2 $(R_1 > R_2)$ — радиусы сферического слоя K (т. е. радиусы двух сферических поверхностей, ограничивающих слой изнутри и снаружи), и ρ — радиус любой сферической поверхности σ, концентрической с граничными поверхностями и лежащей внутри слоя $(R_2 \leqslant \rho \leqslant R_1)$; обозначим, кроме того, через dK элементарный слой, заключенный между сферами с радиусами ρ и $\rho + d\rho$, а через dm — массу этого слоя.

Предположение об однородности каждого из составляющих сферу слоев позволяет рассматривать его как однородную материальную сферическую поверхность; поэтому можно непосредственно приложить результаты предыдущих пунктов. Остается только суммировать элементарные слагаемые, соответствующие каждому элементарному слою dK. Рассмотрим отдельно различные случаи, которые могут представиться в зависимости от положения притягиваемой точки P относительно слоя.

21. В точках, находящихся внутри полости, образуемой сферическим слоем, притяжение, очевидно, равно нулю, так как (п. 16) притяжения отдельных элементарных слоев dK в этих точках равны нулю. Следовательно, потенциал остается постоянным внутри всей полости, и его численное значение получится, если мы просуммируем элементарные потенциалы.

Обозначив через μ плотность слоя, которая, по предположению, является функцией только расстояния от центра ρ, и через dm

массу любого элементарного слоя dK, мы будем иметь (принимая во внимание, что объем dK равен $4\pi\rho^2 d\rho$)

$$dm = 4\pi\mu(\rho)\,\rho^2\,d\rho,$$

откуда (если в качестве переменной интегрирования будем писать s вместо ρ)

$$U = 4\pi f \int_{R_2}^{R_1} \mu(s)\,s\,ds. \tag{12}$$

Это и есть постоянное значение потенциала слоя внутри полости.

Если плотность μ постоянна, то будем иметь

$$U = 2\pi f\mu\,(R_1^2 - R_2^2). \tag{12'}$$

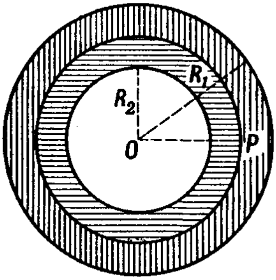
22. Случай притягиваемой точки P, внешней для слоя (радиус-вектор $\rho > R_1$). Так как каждый элементарный слой dK действует на P так, как если бы вся его масса была сосредоточена в O, то то же самое можно сказать и о целом слое K, и потому потенциал, как и в случае сферической поверхности, будет иметь вид

$$U = f\frac{m}{\rho}, \tag{11}$$

где m означает всю притягивающую массу, т. е. полную массу слоя.

Это выражение представляет собой, в частности, потенциал притяжения полной сферы (состоящей из однородных концентрических слоев) во внешних точках.

23. Предположим, наконец, что притягиваемая точка находится внутри притягивающего слоя ($R_2 \leqslant \rho \leqslant R_1$). В этом случае потенциал можно вычислить, воспользовавшись тем обстоятельством (п. 12), что для всякого пространственного распределения притягивающих масс потенциал и его первые производные остаются *всюду конечными и непрерывными функциями* (несмотря на то, что точка P, лежащая внутри притягивающей массы, есть особая точка подинтегральной функции).



Фиг. 26.

Представим себе, что слой K разделен на две части посредством сферической поверхности с радиусом ρ, проходящей через притягиваемую точку P (фиг. 26). Пусть K_1 есть внешний слой (с радиусами R_1, ρ) и K_2 — внутренний (с радиусами ρ, R_2). Если мы обозначим через U_1 и U_2 потенциалы слоев K_1 и K_2, относящиеся к какой-нибудь точке и, в частности, относящиеся к точке P, то будем, очевидно, иметь (в точке P)

$$U = U_1 + U_2,$$

поэтому достаточно определить U_1 и U_2. Мы знаем уже (п. 21) (постоянное) значение U_1 во всех внутренних точках сферы с радиусом ρ (которая составляет полость слоя K_1); вследствие непрерывности функция U_1 сохранит то же самое значение также и на поверхности сферы с радиусом ρ и, в частности, в точке P, так что на основании формулы (12) будем иметь

$$U_1 = 4\pi f \int_{\rho}^{R_1} \mu(s)\, s\, ds.$$

Что же касается потенциала U_2, то мы знаем (п. 22) его выражение для всякой точки, внешней относительно слоя K_2; вследствие непрерывности потенциала выражение для U_2 останется в силе также и на внешнем контуре; поэтому равенство (11), если его применить к точке P и принять во внимание, что m (масса K_2) имеет значение $4\pi \int_{R_2}^{\rho} \mu(s)\, s^2\, ds$, даст

$$U_2 = 4\pi f \frac{1}{\rho} \int_{R_2}^{\rho} \mu(s)\, s^2\, ds.$$

Отсюда получается искомое выражение потенциала для внутренних точек притягивающего слоя, а именно

$$U = 4\pi f \left\{ \int_{\rho}^{R} \mu(s)\, s\, ds + \frac{1}{\rho} \int_{R_2}^{\rho} \mu(s)\, s^2\, ds \right\} \quad (R_2 \leqslant \rho \leqslant R_1). \tag{13}$$

В случае однородного слоя (плотность μ постоянна), выполняя указанное интегрирование, найдем

$$U = 4\pi f \mu \left\{ \frac{1}{2} R_1^3 - \frac{1}{6} \rho^2 - \frac{1}{3} \frac{R_2^3}{\rho} \right\}$$

и, в частности, для полной сферы с радиусом R ($R_1 = R$, $R_2 = 0$)

$$U = 4\pi f \mu \left\{ \frac{1}{2} R^2 - \frac{1}{6} \rho^2 \right\} \quad (\rho \leqslant R). \tag{13'}$$

24. Как мы видим и как это можно предвидеть из соображений симметрии, потенциал сферического слоя, составленного из однородных сферических слоев, зависит только от расстояния ρ притягиваемой точки P от центра слоя. Поэтому эквипотенциальные поверхности представляют собой концентрические сферы, а силовые линии — соответствующие радиусы, так что притяжение (также и в точках P, внутренних для притягивающей массы) есть центральная сила, имеющая O центром силы. Проекция φ силы притяжения на направление радиуса (радиальная проекция) определяется (гл. VII, п. 26) производной $dU/d\rho$; дифференцируя равенство (13) по ρ и принимая во внимание, что оба члена, происходящие от дифференцирования первого интеграла по нижнему пределу и второго по верхнему пределу, сокращаются, получим

$$\varphi = \frac{dU}{d\rho} = -\frac{4\pi f}{\rho^2}\int_{R_2}^{\rho} \mu(s)\, s^2\, ds \qquad (R_2 \leqslant \rho \leqslant R_1), \tag{14}$$

откуда видно, что φ является существенно отрицательной величиной. Это подтверждает тот факт, становящийся очевидным на основании деления слоя на две части K_1 и K_2, что *также и внутри притягивающего слоя сила притяжения всегда направлена к центру.*

Заметим, что при $\rho = R_1$, если примем во внимание, что полная масса m слоя равна $\int_{R_2}^{R_1} 4\pi s^2 \mu(s)\, ds$, выражение (14) может быть написано в виде

$$\varphi = -\frac{fm}{R_1^2},$$

т. е. для точки, лежащей на поверхности слоя, как и для внешней точки, потенциал имеет такой вид, как если бы вся масса слоя была сосредоточена в центре.

При $\rho = R_2$, наоборот, имеем $\varphi = 0$, как это и требуется для того, чтобы сила притяжения была равна нулю во всех точках внутренней полости.

Таким образом, в этом примере непосредственными вычислениями мы подтвердили непрерывность поля силы тяжести.

В частном случае полной однородной сферы из равенства (14), полагая в нем плотность μ постоянной и $R_2 = 0$, или из равенства (13) после дифференцирования будем иметь

$$\varphi = -\frac{4}{3}\pi f \mu \rho \qquad (\rho \leqslant R). \tag{14'}$$

Притяжение во внутренних точках будет поэтому прямо пропорционально расстоянию от центра.

25. Притяжение полной однородной сферы. Обозначим через R радиус сферы, через μ плотность, вследствие чего масса будет определяться равенством

$$m = \mu \frac{4}{3}\pi R^3,$$

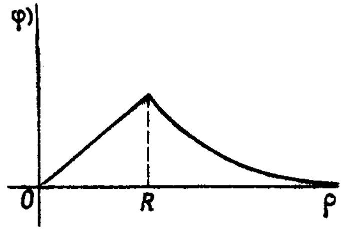
и через ρ расстояние любой притягиваемой точки P от центра.

На основании пп. 22, 23 будем иметь

$$U=\begin{cases}\dfrac{fm}{\rho}, & \text{во внешних точках} \quad (\rho > R),\\ 4\pi f\mu\left(\dfrac{1}{2}R^2-\dfrac{1}{6}\rho^2\right)=\dfrac{3fm}{R^3}\left(\dfrac{1}{2}R^2-\dfrac{1}{6}\rho^2\right), & \text{во внутренних точках} \quad (\rho < R).\end{cases}$$

При $\rho = R$ мы получим одно и то же значение из обоих равенств.

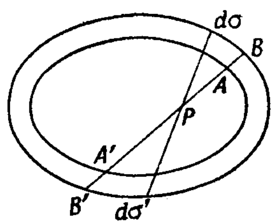
Сила притяжения всегда направлена к центру, и ее величина $|\varphi| = \left|\dfrac{dU}{d\rho}\right|$ определяется во внешних точках выражением fm/ρ^2, как если бы вся масса была сосредоточена в центре; во внутренних точках сила притяжения равна $\frac{4}{3}\pi f\mu\rho = fm\rho/R^3$ и оказывается, таким образом, пропорциональной расстоянию от центра. На поверхности ($\rho = R$) имеем общий предел fm/R^2. Поэтому, если представим графически величину силы притяжения, беря за абсциссу расстояние ρ притягиваемой точки от центра и за ординату абсолютную величину радиальной проекции φ силы притяжения (фиг. 27), то получим непрерывную кривую, составленную (для значений ρ между $\rho = 0$ и $\rho = R$) из прямолинейного отрезка, выходящего из начала и (при $\rho > R$) из дуги кубической гиперболы, пересекающей прямолинейный отрезок под конечным и отличным от нуля углом, образуя точку заострения. Поэтому производная от абсолютной величины силы притяжения по ρ при $\rho = R$ имеет разрыв.



Фиг. 27.

26. Притяжение однородным эллипсоидальным слоем внутренних точек. Понимая под эллипсоидальным слоем всякий материальный слой, заключенный между двумя концентрическими гомотетичными относительно общего центра эллипсоидами, мы покажем здесь, что, в предположении однородности, притяжение такого слоя во всякой точке внутренней полости равно нулю.

Обратимся сначала к эллипсоидальному слою очень малой толщины, которую мы будем считать величиной первого порядка; выберем внутри полости какую-нибудь точку P (фиг. 28) и рассмотрим элементарный конус с вершиной в этой точке. Этот конус вырежет на поверхности внешнего эллипсоида элементарную площадку $d\sigma$ — основание материального элемента, заключенного внутри



Фиг. 28.

конуса. Противоположный конус вырежет из слоя другой материальный элемент, площадь основания которого на внешнем эллипсоиде обозначим через $d\sigma'$. Покажем теперь, что силы притяжения, действующие на точку P со стороны двух указанных материальных элементов, равны и прямо противоположны. Так как материальные элементы, о которых идет речь, можно считать материальными точками, то непосредственно ясно, что обе силы притяжения имеют одну и ту же линию действия и противоположные направления, так что все сводится к тому, чтобы доказать равенство (по крайней мере, с точностью до бесконечно малых высшего порядка) абсолютных величин этих сил.

Для этой цели, обозначив через A, B точки, в которых какая-нибудь произвольно взятая образующая пересекает оба эллипсоида с одной стороны от P, через A', B' — точки, в которых та же самая образующая пересекает оба эллипсоида с противоположной стороны от P, заметим, что объем элемента слоя при AB равен (с точностью до бесконечно малых высшего порядка) объему цилиндра (вообще говоря, наклонного) с основанием $d\sigma$ и образующей AB (с точностью до бесконечно малых, которыми можно пренебречь). Нормальное сечение этого цилиндра, проходящее через A, представляет собой (с точностью до бесконечно малых высшего порядка) элемент $d\pi$, вырезаемый конусом, проектирующим $d\sigma$ из P, на сфере с центром в P и радиусом PA. Поэтому объем цилиндра или, в конечном счете, элемента слоя представится (с точностью до бесконечно малых, которыми можно пренебречь) выражением

$$AB \cdot d\pi.$$

Но если мы сравним $d\pi$ с элементом $d\omega$, вырезаемым тем же самым проектирующим из P конусом на сфере с центром в P и радиусом, равным 1 (т. е. с так называемым *телесным углом*, под которым виден элемент $d\sigma$ из P), то будем иметь

$$d\pi = PA^2 \cdot d\omega;$$

поэтому заключаем, что объем элемента рассматриваемого слоя (с точностью до бесконечно малых высшего порядка) может быть представлен в виде

$$AB \cdot PA^2 \cdot d\omega,$$

а абсолютная величина силы притяжения точки P — в виде

$$\mu \cdot AB \cdot d\omega, \tag{15}$$

где через μ обозначена плотность (постоянная) слоя.

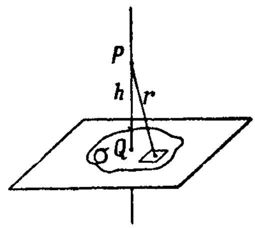
Аналогично сила притяжения точки P со стороны элемента при $A'B'$ противоположна первой и по абсолютной величине равна

$$\mu \cdot A'B' \cdot d\omega. \tag{15'}$$

Но оба эллипсоида, будучи гомотетичны относительно общего центра, имеют по отношению ко всякому направлению одну и ту же сопряженную диаметральную плоскость; поэтому, в частности, плоскость, сопряженная с направлением AA', делит обе хорды AA' и BB' пополам. Отсюда следует и равенство двух отрезков AB, $A'B'$ и, следовательно, равенство абсолютных величин (15), (15') сил притяжения точки со стороны обоих рассматриваемых элементов. Поэтому полная сила притяжения, действующая на точку P, будет равна нулю; достаточно ко всякому материальному элементу слоя присоединить противоположный ему относительно P элемент, чтобы заключить, что сила притяжения всякой точки внутренней полости слоя будет равна нулю.

Полученный таким образом результат, очевидно, распространяется на однородный эллипсоидальный слой конечной толщины, если представить себе его разложенным на элементарные (т. е. бесконечно тонкие) слои, что можно выразить словами так: *потенциал однородного эллипсоидального слоя для всех точек внутренней полости имеет постоянную величину.*

27. Нормальная составляющая притяжения плоского однородного слоя. Если задан плоский однородный слой σ (фиг. 29) плотности ν и выбрана точка P, расстояние которой от плоскости σ есть h, то силу притяжения плоскостью σ точки P можно разложить на составляющие нормальную и касательную к плоскости. Ограничимся рассмотрением первой, так как она встречается во многих приложениях (в частности, в электростатике).



Фиг. 29.

Для этой цели рассмотрим прежде всего нормальную составляющую притяжения произвольного материального элемента $dm = \nu\, d\sigma$. Если обозначим через r его расстояние от точки P и через θ угол (острый), который образует с нормалью к плоскости σ прямая, соединяющая его с точкой P, то нормальная составляющая элементарного притяжения точки P будет равна

$$f\frac{\nu\, d\sigma}{r^2}\cos\theta. \qquad (16)$$

Рассматривая сферу с центром в P, проходящую через какую-нибудь точку элемента $d\sigma$ (и поэтому имеющую, с точностью до бесконечно малых высшего порядка, радиус r), и рассуждая как в п. 16, мы увидим, что произведение $\cos\theta\, d\sigma$ численно равно (с точностью до бесконечно малых, которыми можно пренебречь) площади, вырезаемой на этой сфере элементарным конусом, проектирующим из P контур $d\sigma$. Следовательно, выражение

$$\frac{\cos\theta\, d\sigma}{r^2}$$

численно равно площади, вырезаемой тем же самым элементарным конусом на сфере с центром в P и радиусом, равным 1, т. е. телесному углу $d\omega$, под которым элемент $d\sigma$ виден из точки P. Поэтому величине (16) нормальной составляющей элементарного притяжения можно придать вид

$$f\nu\, d\omega.$$

Проинтегрировав по всей площади σ и обозначив через Ω телесный угол, под которым она видна из P, найдем, что величина нормальной составляющей притяжения плоскостью σ точки P выразится в виде

$$f\nu\Omega. \qquad (17)$$

Этот результат получает особый интерес, если в качестве притягивающей поверхности рассматривается однородный круглый диск, а в качестве притягиваемой точки — точка на его оси (т. е. на перпендикуляре в центре круга к его плоскости); в этом случае полное притяжение диском точки P вследствие очевидной симметрии должно быть направлено по оси диска, так что выражение (17) дает как раз это полное притяжение.

Если, далее, рассматривается однородная притягивающая плоскость, то притяжение какой угодно точки остается всегда нормальным к плоскости; а так как в этом случае телесный угол измеряется площадью полусферы радиуса, равного 1, то по абсолютной величине сила притяжения представится в виде

$$2\pi f\mu.$$

Прибавим последнее замечание, справедливое для плоской притягивающей площадки σ произвольного вида. Обозначив через Q основание перпендикуляра, опущенного из точки P на плоскость площадки σ, представим себе, что P стремится по перпендикуляру к Q. Если Q находится вне σ, то из выражения (17) получится, что нормальная составляющая притяжения стремится к нулю; она будет стремиться к нулю и в том случае, когда притягиваемая точка стремится к Q, по этому перпендикуляру, с противоположной стороны от плоскости площадки σ. В силу симметрии нормальная составляющая будет иметь с обеих сторон от плоскости (относительно общей направленной нормали) противоположные знаки. Она будет оставаться непрерывной также и при переходе притягиваемой точки с одной стороны плоскости на другую, как, впрочем, мы это уже знаем из п. 7.

Предположим, наоборот, что точка Q является внутренней для σ. Когда притягиваемая точка P стремится к Q вдоль перпендикуляра как с одной, так и с другой стороны от плоскости, то нормальная составляющая притяжения стремится, по абсолютной величине, к $2\pi f\nu$; так как с обеих сторон от плоскости она имеет противоположные знаки, то мы приходим к следующему заключению: если притягиваемая точка проходит ортогонально сквозь притягивающую поверхность, то нормальная составляющая притяжения испытывает разрыв, изменяясь на $4\pi f\nu$. Это является частным случаем общего результата, который мы указали в п. 13.

28. Притяжение произвольным телом удаленной точки. Пусть Δ есть наибольший размер части S пространства, занятой притягивающим телом C (наибольшее расстояние между двумя точками тела). Если расстояние ρ притягиваемой точки P от любой точки O из S столь велико (по сравнению с размерами тела), что отношение Δ/ρ можно считать ничтожным, то все точки пространства S (в отношении их расстояния до P) будут как бы совпадать с геометрической точкой O и притяжение будет таким, как если бы вся масса m тела была сосредоточена в O; следовательно, прямая PO является *линией действия* силы притяжения; величина силы притяжения равна fm/ρ^2, а соответствующий потенциал равен fm/ρ.

Предположим теперь, что отношение Δ/ρ не настолько мало, чтобы им можно было пренебречь, но все же оказывается возможным пренебречь подходящей степенью этого отношения, например квадратом или кубом. Притяжение тела нельзя уже считать совпадающим с притяжением одной только точки с массой m, помещенной в O, так как будут иметь место небольшие отклонения от величины и направления этого притяжения. Мы определим эти отклонения (с точностью до величин определенного порядка по сравнению с отношением Δ/ρ), указав поправочные члены, которые нужно присоединить к выражению fm/ρ (точечного) потенциала, чтобы производные дали проекции притяжения в пределах нужного приближения.

Введем для этой цели следующие обозначения: r — расстояние точки P от какой-либо точки Q из S, μ — плотность тела в Q, ξ, η, ζ — координаты точки Q относительно какой-нибудь системы осей координат $Oxyz$ с началом в точке O, δ — радиус-вектор OQ, x, y, z — координаты точки P относительно той же самой системы координат и, наконец, θ — угол между полупрямыми OP и OQ.

Из треугольника OPQ имеем

$$r^2 = \rho^2 + \delta^2 - 2\rho\delta\cos\theta,$$

откуда

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\rho}(1-\omega)^{-1/2},$$

где для краткости положено

$$\omega = \frac{2\delta\rho\cos\theta - \delta^2}{\rho^2} = \frac{\delta}{\rho}\left\{2\cos\theta - \frac{\delta}{\rho}\right\}.$$

Если заметим, что радиус-вектор δ не может превзойти наибольший размер Δ тела S, то тотчас же увидим, что ω будет малой величиной первого порядка, так что если обозначим через (3) выражение третьего порядка по сравнению с отношением δ/ρ, то из разложения в биномиальный ряд будем иметь

$$(1-\omega)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}\omega + \frac{3}{8}\omega^2 + (3),$$

Кроме того, имеем

$$\omega^2 = \frac{\delta^2}{\rho^2} 4\cos^2\theta + (3);$$

поэтому, выявляя члены двух первых порядков, можно написать

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\rho}(1-\omega)^{-1/2} = \frac{1}{\rho}\left\{1 + \frac{\delta}{\rho}\cos\theta + \frac{1}{2}\frac{\delta^2}{\rho^2}(3\cos^2\theta - 1) + (3)\right\}. \quad (18)$$

Внесем это значение $1/r$ в выражение потенциала

$$U = f\int_S \frac{\mu}{r}\,dS$$

и положим

$$U_0 = \frac{f}{\rho}\int_S \mu\,dS = \frac{fm}{\rho}, \quad (19)$$

$$U_1 = \frac{f}{\rho^2}\int_S \mu\delta\cos\theta\,ds, \quad (20)$$

$$U_2 = \frac{f}{\rho^3}\int_S \mu\,\frac{1}{2}\delta^2(3\cos^2\theta - 1)\,dS; \quad (21)$$

теперь, обозначая через U^* дополнительный член $\frac{f}{\rho}\int_S \mu\,(3)\,dS$, будем иметь

$$U = U_0 + U_1 + U_2 + U^*. \quad (22)$$

В первых трех слагаемых мы имеем соответственно точечный потенциал и поправки первого и второго порядка. Найдем их явные выражения на основе равенств (20) и (21).

29. Если заданы значения δ и θ, то произведение $\delta\cos\theta$ будет не чем иным, как проекцией вектора $\overrightarrow{OQ}$, т. е. радиуса-вектора точки Q, на направление OP. Можно также сказать, что если OP

рассматривается как положительное направление одной из осей координат, то $\delta \cos \theta = q$ представит соответствующую координату точки Q. Теперь (гл. X, п. 15)

$$\int_S \mu q \, dS = mq_0,$$

где q_0 означает соответствующую координату центра тяжести Q_0, или, если угодно, проекцию радиуса-вектора $\overrightarrow{OQ_0}$ на OP. Равенство (20) можно, таким образом, представить в виде

$$U_1 = \frac{fm}{\rho} \frac{q_0}{\rho}. \tag{20'}$$

Количество q_0 зависит одновременно от положения центра тяжести притягивающего тела и от ориентации OP, или, по существу, от координат x, y, z притягиваемой точки. Желательно выставить эти координаты на вид, так как для перехода к проекциям силы притяжения необходимо дифференцировать по x, y, z.

Обозначим для этой цели через ξ_0, η_0, ζ_0 координаты центра тяжести Q_0 по отношению к системе $Oxyz$, которые, очевидно, не зависят от притягиваемой точки P. Учитывая, что направляющие косинусы OP суть x/ρ, y/ρ, z/ρ, непосредственно будем иметь

$$q_0 = \xi_0 \frac{x}{\rho} + \eta_0 \frac{y}{\rho} + \zeta_0 \frac{z}{\rho},$$

и поэтому

$$U_1 = \frac{fm}{\rho^3} (\xi_0 x + \eta_0 y + \zeta_0 z). \tag{20''}$$

Отсюда [как, впрочем, также и из равенства (20′)] следует, что *поправка первого порядка U_1 равна тождественно нулю, если точка O совпадает с центром тяжести, т. е. притяжение тела равно притяжению материальной точки, имеющей массу тела и помещенной в центре тяжести.*

30. Перейдем теперь к вычислению величины U_2 и начнем с тождества

$$\frac{1}{2} \delta^2 (3 \cos^2 \theta - 1) = \frac{1}{2} \delta^2 (2 - 3 \sin^2 \theta).$$

Так как $\delta^2 \sin^2 \theta$ есть квадрат расстояния точки Q от оси OP, то, обозначив через I момент инерции притягивающего тела относительно OP и через

$$M = \int_S \mu \delta^2 \, dS$$

его полярный момент (гл. X, п. 14) относительно O, получим из равенства (21)

$$U_2 = \frac{f}{\rho^3}\left\{M - \frac{3}{2}I\right\}. \qquad (21')$$

Здесь следует отметить, что, в то время как M есть постоянная характеристика притягивающего тела, I зависит, кроме того, от направления OP, являясь (гл. X, п. 22) квадратичной функцией от направляющих косинусов x/ρ, y/ρ, z/ρ.

Предположив для простоты, что оси x, y, z являются главными осями инерции относительно начала O, мы приведем выражение I (гл. X, п. 24) к виду

$$I = \frac{1}{\rho^2}(Ax^2 + By^2 + Cz^2),$$

где, как обычно, A, B, C представляют собой главные моменты инерции.

Внесем это выражение I в равенство (21′) и примем во внимание соотношение

$$M = \int \mu\delta^2\, dS = \int_S \mu(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)\, dS = \frac{1}{2}(A + B + C).$$

Введя вместо A, B, C главные радиусы инерции δ_1, δ_2, δ_3 и положив

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= -2\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2, \\ c_2 &= \delta_1^2 - 2\delta_2^2 + \delta_3^2, \\ c_3 &= \delta_1^2 + \delta_2^2 - 2\delta_3^2 \end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

(вследствие чего $c_1 + c_2 + c_3 = 0$), после очевидных приведений получим

$$U_2 = \frac{fm}{\rho^5}\,\frac{1}{2}\{c_1x^2 + c_2y^2 + c_3z^2\}. \qquad (21'')$$

31. Таким образом, потенциал U притяжения каким-нибудь телом удаленной точки, по крайней мере до членов третьего порядка (по отношению к Δ/ρ), на основании равенств (20), (20′) и (21′) может быть приведен к виду

$$U = \frac{fm}{\rho} + \frac{fm}{\rho}\,\frac{q_0}{\rho} + \frac{f}{\rho^3}\left\{M - \frac{3}{2}I\right\},$$

где ρ означает расстояние от P до какой угодно точки O притягивающего тела, q_0 есть проекция на направление OP радиуса-вектора, проходящего через центр тяжести, M — полярный момент тела относительно O, I — его момент инерции относительно оси OP.

Если совместим точку O с центром тяжести, то q_0 будет равно нулю и в формуле не будет поправки первого порядка. Останется поправка второго порядка

$$\frac{f}{\rho^3}\left(M - \frac{3}{2} I\right),$$

которая относительно главных осей инерции принимает вид (21″).

В конечном счете, при подходящем выборе осей и пренебрегая членами третьего порядка, мы придем к выражению

$$U = \frac{fm}{\rho}\left\{1 + \frac{1}{2\rho^4}(c_1x^2 + c_2y^2 + c_3z^2)\right\},$$

где c_1, c_2, c_3 означают постоянные [определяемые равенством (23) в функциях от главных радиусов инерции].

32. Поправки силы притяжения. Из найденной поправки для потенциала путем дифференцирования можно получить поправки для силы притяжения. Остается только устранить сомнение, заключающееся в том, что отброшенные в выражении потенциала члены третьего порядка (по отношению к Δ/ρ) после дифференцирования могут дать поправки второго, а может быть и первого порядка. Чтобы выяснить это обстоятельство, мы можем поступить так, как указано ниже.

Положив для краткости

$$\varepsilon = \frac{\delta}{\rho}, \qquad \gamma = \cos\theta, \tag{24}$$

так что ε будет членом первого порядка и $|\gamma| \leqslant 1$, очевидно, получим

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + \delta^2 - 2\rho\delta\cos\theta}} = \frac{1}{\rho}\{1 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon\gamma\}^{-1/2}.$$

Тождество $1 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon\gamma = (1 - \varepsilon\gamma)^2 + (1 - \gamma^2)\varepsilon^2$ показывает, что при $|\gamma| \leqslant 1$ и при $|\varepsilon| < L$ (условие, удовлетворяющееся в нашем случае с избытком ввиду малости ε) левая часть его не может обратиться в нуль.

Отсюда следует, что выражение

$$\varphi(\varepsilon, \gamma) = (1 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon\gamma)^{-1/2} \tag{25}$$

при указанных значениях ε и γ представляет собой функцию от двух переменных, конечную, непрерывную и дифференцируемую сколько угодно раз.

Применим к этой функции разложение Маклорена по аргументу ε, остановленное на члене третьего порядка, используя для остаточного члена не обычную форму Лагранжа, а интегральную форму, получающуюся при интегрировании по частям [1]). Будем иметь

$$\varphi(\varepsilon, \gamma) = \varphi(0, \gamma) + \varepsilon\varphi'(0, \gamma) + \frac{\varepsilon^2}{2}\varphi''(0, \gamma) + \\ + \frac{\varepsilon^3}{2}\int_0^1 (1-\tau)^2 \varphi'''(\tau\varepsilon, \gamma)\, d\tau,$$

где штрихи указывают дифференцирование функции φ по ее первому аргументу [2]).

Так как на основании равенства (25)

$$\varphi' = -\frac{1}{2}(1 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon\gamma)^{-3/2}(2\varepsilon - 2\gamma) = (\gamma - \varepsilon)\varphi^3$$

и, следовательно,

$$\varphi'' = 3(\gamma - \varepsilon)\varphi^2\varphi' - \varphi^3 = 3(\gamma - \varepsilon)^2\varphi^5 - \varphi^3,$$

то при $\varepsilon = 0$ имеем

$$\varphi(0, \gamma) = 1, \qquad \varphi'(0, \gamma) = \gamma, \qquad \varphi''(0, \gamma) = 3\gamma^2 - 1,$$

откуда следует, что

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\rho}\varphi(\varepsilon, \gamma) = \\ = \frac{1}{\rho}\left\{1 + \varepsilon\gamma + \frac{\varepsilon^2}{2}(3\gamma^2 - 1) + \frac{\varepsilon^3}{2}\int_0^1 (1-\tau)^2\varphi'''(\tau\varepsilon, \gamma)\, d\tau\right\}.$$

33. Сравнение с выражением (18) для $1/r$ показывает, что дополнительный член, обозначенный символом (*З*), совпадает с последним слагаемым в скобках, что можно было предвидеть, так как разложение по степеням ε приводит как раз к разделению членов различных порядков.

Таким образом, мы можем теперь написать выражение для дополнительного члена U^* (п. 28), представляющего собой отбрасы-

---

[1]) См., например, Dini, Lezioni di Analisi infinitesimale, т. I, Пиза, 1909, стр. 301. В указанном там выражении для остаточного члена надо положить $x = \varepsilon$, $\alpha = 0$, $n = 2$, затем $v = \tau\varepsilon$. Тогда получится форма, которой мы здесь воспользовались.

[2]) Заметим, что коэффициенты $\frac{1}{n!}\varphi^{(n)}(0, \gamma)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ при последовательных степенях ε в разложении $\varphi(\varepsilon, \gamma) = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon\gamma}}$ будут полиномами степени n относительно γ, называемыми *сферическими функциями* (первого рода).

ваемую в выражении для потенциала часть (порядка выше второго), а именно

$$U^* = \frac{f}{2\rho}\int\limits_S \mu\varepsilon^3\,dS \int\limits_0^1 (1-\tau)^2\varphi'''(\tau\varepsilon,\ \gamma)\,d\tau, \tag{26}$$

где ε и γ представляют собой величины, определенные равенствами (24).

Мы достигнем нашей цели, если покажем, что в производных от U^* по x, y, z остается (как и в самом выражении U^*) множитель ε^3 (умноженный на функции, остающиеся конечными, когда ε стремится к нулю).

34. Рассмотрим, например, $\partial U^*/\partial x$. Так как U^* зависит от x через посредство ρ, ε, γ, а пределы интегрирования (как пространственные, так и относящиеся к переменной τ) постоянны, то достаточно выполнить дифференцирование под знаком интеграла.

Заметим, далее, что по определению ρ имеем

$$\varepsilon = \frac{\delta}{\rho}, \qquad \gamma = \cos\theta = \frac{x}{\rho}\frac{\xi}{\delta} + \frac{y}{\rho}\frac{\eta}{\delta} + \frac{z}{\rho}\frac{\zeta}{\delta},$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial x} = \frac{x}{\rho}, \qquad \frac{\partial\frac{1}{\rho}}{\partial x} = -\frac{1}{\rho^2}\frac{x}{\rho},$$

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\varepsilon\frac{x}{\rho}, \qquad \frac{\partial\gamma}{\partial x} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\xi}{\delta} - \frac{x}{\rho}\gamma\right),$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{1}{\rho}\varepsilon^3\varphi'''(\tau\varepsilon,\ \gamma)\right\} =$$

$$= \frac{\varepsilon^3}{\rho^2}\left\{-\frac{4x}{\rho}\varphi'''(\tau\varepsilon,\ \gamma) - \varepsilon\tau\frac{x}{\rho}\varphi^{\mathrm{IV}}(\tau\varepsilon,\ \gamma) + \left(\frac{\xi}{\delta} - \frac{x}{\rho}\gamma\right)\frac{\partial}{\partial\gamma}\varphi'''(\tau\varepsilon,\ \gamma)\right\}.$$

Если мы заметим, что x/ρ и ξ/δ — направляющие косинусы (векторов $\overrightarrow{OP}$ и $\overrightarrow{OQ}$ соответственно), и вспомним, что было сказано выше о поведении функции φ и ее производных, то очевидно, что количество в скобках есть функция F, которая остается конечной и непрерывной (во всей области интегрирования) даже при ε, стремящемся к нулю.

Таким образом, получаем

$$\frac{\partial U^*}{\partial x} = \frac{f}{2\rho^2}\int\limits_S \mu\varepsilon^3\,dS\int\limits_0^1 (1-\tau)^2 F\,d\tau$$

и аналогичные формулы для производных по y и z, откуда видно, что эти производные содержат множителем ε^3, как мы и хотели показать.

35. Заметим, что так как уменьшение $\varepsilon = \delta/\rho$ происходит для заданного притягивающего тела от удаления притягиваемой точки P или от возрастания ρ, то производные от U^* будут стремиться к нулю по двум причинам: вследствие наличия множителя ε^3 под знаком интеграла и делителя ρ^2 перед интегралом. Относительно $1/\rho$ (величины, обратной расстоянию от притягиваемой точки) производные от U^* будут поэтому пятого, а не третьего порядка и аналогично, согласно равенству (26), функция U^* — четвертого порядка. Эти рассуждения не вызывают возражений. Но с физической точки зрения нельзя забывать, что понятия „большая величина", „малая величина" заданного порядка приобретают определенный смысл только при сравнении с другой величиной того же вида.

В настоящем случае характер вопроса подсказывает и величины сравнения: для U^* следует взять *точное* значение U потенциала, для производных от U^* — *точное* значение Φ_1 величины силы притяжения.

Для оценки можно взять вместо точных значений элементов сравнения первые члены разложения их fm/ρ и fm/ρ^2, которые соответствуют предельному случаю, когда размеры тела очень малы по сравнению с ρ и когда масса сосредоточена в O

Составив отношения

$$\frac{U^*}{\frac{fm}{\rho}}, \quad \frac{\text{производная от } U^*}{\frac{fm}{\rho^2}},$$

мы увидим, что множители $1/\rho$ и $1/\rho^2$ исключаются и оба отношения оказываются величинами третьего порядка по отношению к ε.

То же самое можно сказать и об отношениях

$$\frac{U^*}{U}, \quad \frac{\text{производная от } U^*}{\Phi};$$

для этого достаточно написать их в виде

$$\frac{U^*}{\frac{fm}{\rho}} : \frac{U}{\frac{fm}{\rho}}, \quad \frac{\text{производная от } U^*}{\frac{fm}{\rho^2}} : \frac{\Phi}{\frac{fm}{\rho^2}},$$

заметив при этом, что $U : (fm/\rho)$ и $\Phi : (fm/\rho^2)$ отличаются от единицы членами, представляющими собою, по меньшей мере, члены первого порядка по отношению к ε.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Представим себе, что единица длины выбрана произвольно и мы условились принимать за единицу массы массу куба дестиллированной воды (при 4° С и т. д.) с ребром, равным единице длины. Как надо выбрать единицу времени для того, чтобы постоянная всемирного тяготения была равна единице?