35. Заметим, что так как уменьшение $\varepsilon = \delta/\rho$ происходит для заданного притягивающего тела от удаления притягиваемой точки P или от возрастания ρ, то производные от U^* будут стремиться к нулю по двум причинам: вследствие наличия множителя ε^3 под знаком интеграла и делителя ρ^2 перед интегралом. Относительно $1/\rho$ (величины, обратной расстоянию от притягиваемой точки) производные от U^* будут поэтому пятого, а не третьего порядка и аналогично, согласно равенству (26), функция U^* — четвертого порядка. Эти рассуждения не вызывают возражений. Но с физической точки зрения нельзя забывать, что понятия „большая величина", „малая величина" заданного порядка приобретают определенный смысл только при сравнении с другой величиной того же вида.

В настоящем случае характер вопроса подсказывает и величины сравнения: для U^* следует взять *точное* значение U потенциала, для производных от U^* — *точное* значение Φ_1 величины силы притяжения.

Для оценки можно взять вместо точных значений элементов сравнения первые члены разложения их fm/ρ и fm/ρ^2, которые соответствуют предельному случаю, когда размеры тела очень малы по сравнению с ρ и когда масса сосредоточена в O

Составив отношения

$$\frac{U^*}{\frac{fm}{\rho}}, \quad \frac{\text{производная от } U^*}{\frac{fm}{\rho^2}},$$

мы увидим, что множители $1/\rho$ и $1/\rho^2$ исключаются и оба отношения оказываются величинами третьего порядка по отношению к ε.

То же самое можно сказать и об отношениях

$$\frac{U^*}{U}, \quad \frac{\text{производная от } U^*}{\Phi};$$

для этого достаточно написать их в виде

$$\frac{U^*}{\frac{fm}{\rho}} : \frac{U}{\frac{fm}{\rho}}, \quad \frac{\text{производная от } U^*}{\frac{fm}{\rho^2}} : \frac{\Phi}{\frac{fm}{\rho^2}},$$

заметив при этом, что $U:(fm/\rho)$ и $\Phi:(fm/\rho^2)$ отличаются от единицы членами, представляющими собою, по меньшей мере, члены первого порядка по отношению к ε.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Представим себе, что единица длины выбрана произвольно и мы условились принимать за единицу массы массу куба дистиллированной воды (при 4° С и т. д.) с ребром, равным единице длины. Как надо выбрать единицу времени для того, чтобы постоянная всемирного тяготения была равна единице?

Ответ. Заметив, что в единицах CGS $f=6{,}7\cdot10^{-8}$ можно представить в виде $\frac{1}{3862^2}$, мы тотчас же найдем, что искомая единица времени равна 3862 сек., т. е. немногим больше одного часа (*натуральный час*, предложенный французским физиком Липпманном).

2. Потенциал однородного отрезка AB в какой-нибудь точке P (внешней для отрезка) можно написать в виде

$$\nu \ln \frac{PA+NA}{PB+NB},$$

где ν означает (линейную) плотность и N — проекцию точки P на AB. Предполагая, что отрезок направлен от B к A, и учитывая надлежащие знаки NA и NB, проверить, что значение потенциала не изменится, если мы обменяем местами A и B (и обратим сообразно с этим направление отрезка).

3. Показать, что притяжение a, действующее со стороны дуги окружности на ее центр, тождественно притяжению материальной точки, помещенной в средней точке дуги. Масса материальной точки должна относиться к массе дуги так же, как длина дуги к длине соответствующей хорды. Следовательно, имеем формулу

$$a=\frac{2f\nu\sin\alpha}{R},$$

где: ν — линейная плотность дуги;
2α — центральный угол (в радианах), соответствующий дуге;
R — радиус дуги.

Для полуокружности, в частности, будем иметь

$$a=\frac{2f\nu}{R}.$$

4. При значениях букв, указанных в упражнении 2, рассмотреть окружность с центром в P и радиусом PN и дугу C (содержащую точку N), отсекаемую на этой окружности отрезками PA и PB. Притяжение отрезка AB в точке P тождественно притяжению дуги C (предполагаемой также однородной и с плотностью ν, как у отрезка). Отсюда следует (предыдущее упражнение), что притяжение в точке P бесконечной прямой (которая получается в виде предельного случая, если представим себе, что точки A и B удаляются в бесконечность в противоположные стороны) направлено по PN и равно $2f\nu/PN$. См., например, T a r l e t o n, An introduction to the mathematical theory of attraction, т. I (Лондон, 1899), стр. 7.

5. Показать, что притяжение (чисто осевое) однородным круговым диском точки на его оси (перпендикулярной к плоскости диска и проведенной через центр) выражается в виде

$$a=2\pi f\nu\left\{1-\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right\},$$

где: R — радиус диска;
ν — плотность (поверхностная);
z — расстояние от притягиваемой точки до диска (ср. п. 27).

6. Из предыдущего упражнения следует, что притяжение однородного кругового диска в точках оси, очень близких к самому диску (величиной z можно пренебречь по сравнению с R), равно $2\pi f\nu$.

Отсюда независимо от п. 27 можно получить притяжение плоской площади σ, имеющей какую угодно форму и плотность.

Рассмотрим точку P, лежащую вне плоскости площади σ и очень близкую к σ. Пусть O есть ее проекция (лежащая внутри площади). Пусть, далее, Q есть какая-нибудь точка площади, *отличная от* O, и $d\sigma$ — окружающий ее элемент. Притяжение элементом $d\sigma$ точки P имеет линией действия прямую PQ, которая составляет с плоскостью площади σ тем меньший угол, чем ближе точка P к плоскости. Проекция элементарного притяжения *на перпендикуляр к плоскости* стремится поэтому к нулю, когда P приближается к O. Это заключение, верное в предположении, что точка Q отлична от O, теряет силу, когда Q совпадает с O, т. е. когда рассматривается элемент $d\sigma_0$ притягивающей плоскости, составляющий непосредственную окрестность точки O.

Мы доказали таким образом, что предельное значение a_0 (при P, стремящемся к O) нормальной составляющей притяжения всей площади σ, действующего на P, равно притяжению элемента $d\sigma_\nu$.

Но притяжение элементом $d\sigma_0$, очевидно, будет то же самое, *каковы бы ни были другие элементы, составляющие вместе с* $d\sigma_0$ *площадь* σ.

При частном предположении, когда $d\sigma$ представляет собой центральный элемент однородного кругового диска, мы уже знаем значение a_0. В этом случае, обозначив через ν_0 значение плотности в точке O, будем иметь

$$a_0 = 2\pi f \nu_0.$$

То же самое соотношение будет иметь место и во всяком другом случае.

Установив это, найти результирующую притяжений, действующих между двумя однородными плоскими пластинками, равными между собой и расположенными в параллельных, очень близких между собой плоскостях таким образом, что одна является нормальной проекцией другой.

Ответ. Результирующая будет нормальна к плоскостям пластинок и равна $2\pi f\nu^2\sigma$ (σ — площадь каждой из пластинок, ν — плотность).

7. Вычислить притяжение (чисто осевое) со стороны однородного кругового цилиндра (μ — плотность, R — радиус, h — высота) в точке на его оси.

(Представить себе цилиндр разделенным на элементарные слои, уподобляемые дискам, посредством плоскостей, параллельных основаниям, и воспользоваться формулой упражнения 5.)

Ответ. Для внешней точки, отстоящей на s от ближайшего основания:

$$A = 2\pi f\mu \int_s^{s+h} \left\{1 - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right\} dz =$$
$$= 2\pi f\mu \left\{h + \sqrt{R^2+s^2} - \sqrt{R^2+(s+h)^2}\right\}. \qquad (1)$$

Для определения притяжения во внутренней точке следует прежде всего обратиться к п. 12 и рассуждать, как в п. 23.

Обозначив через s расстояние от ближайшего основания, найдем, считая за положительные притяжения, направленные к более удаленному основанию,

$$A = 2\pi f\mu \left[\int_0^{h-s} \left\{1 - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right\} dz - \int_0^{s} \left\{1 - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right\} dz\right] =$$
$$= 2\pi f\mu\,(h-2s)\left\{1 - \frac{h}{\sqrt{R^2+(h-s)^2}+\sqrt{R^2+s^2}}\right\}. \qquad (2)$$

Для одного из двух центров оснований (полюсов) имеем (безразлично из формулы (1) или (2), полагая в них $s=0$)

$$A = 2\pi f\mu \{h + R - \sqrt{R^2+h^2}\}. \tag{3}$$

8. Обозначим через A' притяжение, с которым заданная однородная масса, имеющая форму сферы (полной), действует на какую-нибудь точку ее поверхности, через A притяжение той же самой массой, распределенное по объему цилиндра, на его полюс [ср. предыдущие формулы (3)]. Показать, что

$$\frac{A}{A'} = \frac{\sqrt[3]{36\alpha^2}}{1+\alpha+\sqrt{1+\alpha^2}},$$

где α обозначает отношение h/R высоты цилиндра к его радиусу.

Показать еще, что:

1) отношение A/A' стремится к нулю как для цилиндра с очень малой высотой, так и для цилиндра очень удлиненной формы (т. е. при α, стремящемся к нулю или к ∞);

2) отношение A/A' допускает один (и только один) максимум, соответствующий значению $\alpha = 1{,}6404$ (являющемуся корнем уравнения $\alpha^2 - \frac{9}{4}\alpha + 1 = 0$, большим единицы);

3) в условиях максимума притяжение A цилиндром очень немного превосходит (меньше чем на 1%) притяжение A' сферой;

4) имеются два цилиндра, для которых A равно A'; в одном из них диаметр в полтора раза больше высоты.

См., например, Tisserand, Traité de mécanique céleste, т. II, Париж, 1891, стр. 72, где имеется полное доказательство.

9. Вычислить притяжение, вызываемое однородным телом вращения (или частью такого тела, заключенной между двумя плоскостями, перпендикулярными к оси) в какой-нибудь точке на оси тела.

Предположим, для определенности, что притягиваемая точка P является внешней для тела, и условимся отсчитывать координаты z от точки P, выбрав положительное направление на оси z в сторону притягивающего тела.

Пусть $z=s$ и $z=s+h$ будут крайними параллелями и $x=\varphi(z)$ уравнением меридианной кривой.

Достаточно представить себе тело разбитым на элементарные слои между очень близкими друг к другу плоскостями, перпендикулярными к оси, и обратиться к упражнению 5, чтобы тотчас найти

$$A = 2\pi f\mu \left\{h - \int_s^{s+h} \frac{z\,dz}{\sqrt{\varphi(z)+z^2}}\right\},$$

где μ, как обычно, обозначает плотность.

10. Применить формулу предыдущего упражнения к случаю усеченного конуса, сферического сегмента и сегмента параболоида вращения. Показать, в частности, что:

1) для конуса притяжение в вершине равно

$$2\pi f\mu h(1-\cos\gamma),$$

где γ — половина угла при вершине конуса;

2) для сферического сегмента будем иметь в полюсе

$$A = 2\pi f\mu h\left(1 - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{h}{2R}}\right),$$

где R — радиус сферы, которой принадлежит сегмент;

3) для сегмента параболоида вращения будем иметь в полюсе

$$A = 2\pi f\mu\left\{h - \sqrt{h^2 + 2ph} + p\ln\frac{h + p + \sqrt{h^2 + 2ph}}{p}\right\},$$

где p — параметр меридианной параболы ($x^2 = 2pz$).

11. Рассмотреть однородную (твердую) полусферу и точку P ее экватора. Притяжение полусферой точки P лежит вследствие симметрии в (диаметральной) плоскости, проходящей через P, центр O и полюс B полусферы. Определить значение составляющей по PO и по нормали к экваториальной плоскости.

[Проинтегрировать соответствующие составляющие элементарных притяжений, пользуясь полярными координатами с полюсом в P. Соответственно найдем $\frac{2\pi\mu R}{3}$, $\frac{4}{3}\mu R$, где через R обозначен радиус полусферы и через μ — ее плотность. См. Tarleton, цит. место в упражнении 4, стр. 16.]

12. Тело максимального притяжения. Найти форму, которую должно иметь однородное тело вращения данного объема, для того чтобы оно вызывало наибольшее притяжение в полюсе, т. е. в точке, в которой поверхность тела встречается с осью вращения. См. Tisserand, цит. место в упражнении 8, стр. 77—79.