величине меньше некоторого определенного предела, чтобы связь могла выдержать ее действие.

Эти наблюдения разъясняют на простых случаях содержание следующего постулата, впервые высказанного Ньютоном и обычно называемого принципом равенства действия и противодействия.

Всякий раз, когда материальная точка P вследствие наличия другой материальной точки Q подвергается действию некоторой силы $\boldsymbol{F}$, существует как в условиях покоя, так и в условиях движения равная и прямо противоположная ей сила $-\boldsymbol{F}$ (реакция), действующая со стороны P на Q.

Отметим, что когда речь идет о силах, действующих между материальными точками P и Q, которые не находятся в непосредственном соприкосновении, только что сформулированный принцип требует, чтобы эти силы имели в качестве общей линии действия прямую, соединяющую обе эти точки, так как обе силы взаимодействия между точками должны быть прямо противоположны и приложены соответственно в P и Q.

§ 2. Необходимые условия равновесия, общие для всех материальных систем

2. Внешние и внутренние силы. Пусть S есть какая угодно материальная система, т. е. система, состоящая из одного или нескольких тел (твердых, жидких или газообразных). Мы будем рассматривать ее как совокупность материальных точек и предполагать, что она находится под действием системы сил, в которую входят также и реакции. Эти реакции представляют собой действия связей, которые ограничивают свободу перемещения отдельных материальных точек системы.

Для механического изучения заданной системы основное значение имеет следующее замечание. Выбрав произвольную материальную точку P системы S, мы всегда сможем указать, какие из всех сил, действующих на систему (как активных, так и реакций связей), приложены к точке P, и разделить их на две категории:

1) силы, представляющие собой действия на точку P других точек системы S и, в частности, точек, смежных с P; эти силы называются *внутренними силами* (активными или реакциями связей);

2) силы другого происхождения, представляющие собой действия на точку P материальных точек и тел, внешних по отношению к системе S, например вес, если система S предполагается находящейся в обычном поле силы тяжести, или *реакции опоры*, не входящей в S, и т. д. Силы этой категории (как активные, так и реакции связей) называются *внешними*.

Заметим, что обычно, когда говорят без дальнейшего уточнения о силах, действующих на систему, при этом подразумевают только внешние силы.

3. Из самого определения внутренних сил и из принципа равенства действия и противодействия вытекает замечательное свойство этих сил. Так как всякая внутренняя сила $\boldsymbol{f}$, приложенная к какой-нибудь точке P системы, представляет собой действие другой точки Q той же самой системы, то по принципу равенства действия и противодействия существует сила $-\boldsymbol{f}$, представляющая собой действие точки P на точку Q и поэтому тоже внутренняя. Отсюда вытекает, что внутренние силы, рассматриваемые в их совокупности, попарно равны и прямо противоположны, так что мы приходим к следующей теореме: *во всякой материальной системе, находящейся под действием сил, внутренние силы по самой их природе таковы, что приложенные векторы, представляющие эти силы, составляют систему, эквивалентную нулю, или уравновешенную*, т. е. систему, результирующий вектор и результирующий момент которой (относительно всякого центра приведения) равны нулю.

Заметим, что эта теорема приложима также ко всякой системе S', полученной путем мысленного выделения одной части данной системы S; необходимо только обратить внимание на то очевидное обстоятельство, что среди сил, действующих на систему S', внешними для S' будут не только силы, являющиеся одновременно внешними и по отношению к системе S, но и те из сил, внутренних по отношению к S, которые представляют собой действия на систему S' точек системы S, не принадлежащих к S'.

4. Основные уравнения равновесия. Предположим теперь, что материальная система S *находится в равновесии* под действием некоторых сил; этим мы хотим сказать, что если система S в данный момент находится в покое, то рассматриваемые силы не могут вызвать ее движения.

Если, как уже предполагалось выше, вместо возможных связей, существующих между точками системы S, представим себе соответствующие силы (реакции), заменяющие действие связей, то систему можно будет рассматривать как состоящую из совокупности свободных материальных точек, каждая из которых находится в равновесии под действием приложенных к ней сил (активных и реакций связей).

Поэтому если мы разделим силы, действующие на произвольную точку P системы S, на внешние и внутренние и обозначим через $\boldsymbol{F}$ результирующую первых, через $\boldsymbol{f}$ результирующую вторых, то для всякой отдельной точки из S (гл. VII, п. 11) будем иметь

$$\boldsymbol{F}+\boldsymbol{f}=0, \quad \text{или} \quad \boldsymbol{F}=-\boldsymbol{f}.$$

Рассмотрим теперь, с одной стороны, систему всех внешних сил и, с другой — систему всех внутренних сил, действующих на систему S. Так как система внутренних сил векторно эквивалентна нулю (предыдущий пункт), то такой же будет и система внешних сил, т. е. *если какая-нибудь материальная система находится в равновесии под действием некоторых сил, то система приложенных векторов, представляющих внешние силы* (активные и реакции связей), *действующие на систему*, эквивалентна нулю. Если векторы $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{M}$ представляют собой результирующий вектор и результирующий момент внешних сил по отношению к какому-нибудь центру приведения O, то предыдущее условие равновесия выражается двумя векторными уравнениями:

$$\boldsymbol{R}=0, \quad \boldsymbol{M}=0; \tag{1}$$

уравнения (1) после проектирования на оси какой-нибудь системы координат дадут шесть скалярных уравнений:

$$\left.\begin{array}{c} \sum X=0, \ \sum Y=0, \ \sum Z=0; \\ \sum(yZ-zY)=0, \ \sum(zX-xZ)=0, \ \sum(xY-yX)=0, \end{array}\right\} \tag{1'}$$

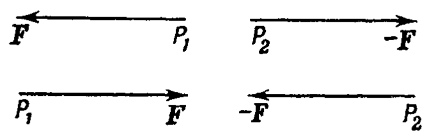
где суммы должны быть распространены на все точки x, y, z системы S, к которым действительно приложены внешние силы (активные или реакции связей). Если эти точки распределены непрерывно (в пространстве трех, двух или одного измерения), то указанные выше суммы должны быть заменены интегралами по области (трех, двух или одного измерения), распространенными на все материальные элементы системы S, на которые действуют внешние силы.

Уравнения (1) или (1′), которые, как мы видели, выражают необходимые условия равновесия всякой материальной системы, называются *основными* или *общими уравнениями равновесия*.

5. Чтобы оценить большую общность основных уравнений, заметим, что если материальная система S при заданных внешних силах находится в равновесии, то будет находиться в равновесии и всякая ее часть S', если предположить, что на нее действуют все силы, которые являются по отношению к ней внешними (по отношению к S эти силы могут быть как внешними, так и внутренними) (п. 3). Таким образом, уравнения (1) или (1′) оказываются приложимыми не только ко всей системе S, но также и ко всякой ее части S', для которой можно определить действующие на нее внешние силы, хотя бы в суммарном виде, представленном их результирующей и их результирующим моментом по отношению к какому-нибудь центру приведения.

Однако вместе с большой общностью основные уравнения имеют тот недостаток, что они, вообще говоря, необходимы, но *не достаточны* для равновесия системы. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим наиболее простой возможный случай, когда мы имеем две свободные материальные точки P_1 и P_2, которые находятся под действием двух равных и прямо противоположных (притягивающих или отталкивающих) сил $\boldsymbol{F}$ и $-\boldsymbol{F}$, действующих по соединяющей эти точки прямой (фиг. 30). Система этих двух сил удовлетворяет, очевидно, основным условиям равновесия, и тем не менее эти две точки не будут, конечно, в равновесии, так как действующая на каждую из них сила (результирующая) не равна нулю.

Поэтому основные уравнения равновесия позволяют лишь утверждать, что данная материальная система S, на которую действуют известные внешние силы, *может* находиться в равновесии, но они не достаточны, вообще говоря, для того, чтобы она действительно находилась в равновесии. Решение задачи о равновесии данной системы S на основе общих уравнений равновесия начинают с приведения известными из теории векторов (гл. I, § 6) способами системы приложенных векторов $\boldsymbol{F}$ к некоторой более простой системе и убеждаются, равны ли нулю результирующий вектор и результирующий момент (по отношению к некоторому центру). Если это не выполняется, то мы можем быть уверены, что система S не находится в равновесии; если же результирующий вектор и результирующий момент равны нулю, то равновесие возможно, и для того, чтобы убедиться, что оно действительно существует, необходимо в общем случае дальнейшее прямое исследование задачи.



Фиг. 30.

Заметим, что в случае системы S, находящейся под действием сил тяжести, совокупность весов отдельных точек системы векторно эквивалентна их результирующей (полный вес S), приложенной в центре тяжести системы.

Для избежания недоразумений следует заметить, что рассмотрение системы сил, *векторно* эквивалентной данной системе внешних сил $\boldsymbol{F}$, имеет чисто теоретическое значение, связанное с возможностью приложения основных уравнений, но, вообще говоря, было бы ошибочным рассматривать эквивалентные системы сил как одинаковые по отношению к их механическим действиям.

В главе XIII мы встретимся с одним важным классом материальных систем, для которых векторная эквивалентность систем внешних сил переходит в механическую эквивалентность.

6. Примеры. В качестве первого простейшего приложения основных уравнений рассмотрим тяжелую цепь, подвешенную за концы к двум крюкам A и B и находящуюся в равновесии. Здесь внешними силами будут: 1) реакции $\boldsymbol{F}_A$ и $\boldsymbol{F}_B$ двух крюков; 2) веса отдельных звеньев, вместо которых, так как речь идет о приложении основных уравнений, мы можем подставить полный вес $\boldsymbol{p}$

цепи, действующий по вертикали, проходящей через ее центр тяжести G.

На основании уравнений (1) необходимое условие равновесия заключается в том, чтобы три вектора $\boldsymbol{F}_A$, $\boldsymbol{F}_B$, $\boldsymbol{p}$ составляли уравновешенную систему, для чего требуется (гл. I, п. 51), чтобы эти три вектора были компланарны, чтобы линии действия сил $\boldsymbol{F}_A$ и $\boldsymbol{F}_B$ пересекались в точке на линии действия силы $\boldsymbol{p}$, т. е. на вертикали, проходящей через центр тяжести G, и чтобы, наконец, результирующая сил $\boldsymbol{F}_A$ и $\boldsymbol{F}_B$ была равна и прямо противоположна $\boldsymbol{p}$.

Отсюда следует, в частности, что когда кусок цепи AB, подвешенный за концы, находится в равновесии под действием силы тяжести, центр тяжести должен лежать в вертикальной плоскости, проходящей через обе точки подвеса.

В качестве второго примера рассмотрим действие, оказываемое тяжелым телом, находящимся в равновесии, например живым существом S, на пол или на какую-либо другую опору, которая его поддерживает. Внешними силами, приложенными к S, в этом случае будут: вес, эквивалентный одной силе $\boldsymbol{p}$, приложенной в центре тяжести G, и реакции, которые тело S испытывает в точках опоры. Эти реакции и вектор $\boldsymbol{p}$, приложенный в G, составляют, на основании п. 4, уравновешенную систему. С другой стороны, на основании принципа равенства действия и противодействия силы, с которыми S действует на опору, равны и противоположны реакциям. Таким образом, мы приходим к заключению, что тело S производит на опору давления, (векторно) эквивалентные собственному весу. Этот результат очевиден, однако полезно получить его, исходя из постулатов, на которые можно опереться с абсолютной уверенностью. Между прочим, отсюда следует, что как бы ни старалось живое существо S уменьшить или увеличить давление на опору, равное его весу, применяя только внутренние силы, например мускульные усилия, ему не удастся это сделать, пока оно находится в покое.