Если обозначим через f внутренние силы, то твердое тело S можно рассматривать как систему свободных материальных точек, находящуюся под действием сил $\boldsymbol{F}$ и f. Так как и система сил $\boldsymbol{F}$ (по предположению) и система сил f (в силу их свойства как внутренних сил, п. 3 предыдущей главы) (векторно) эквивалентны нулю, то система, составленная из сил $\boldsymbol{F}$ и f, будет, в частности, эквивалентна системе сил, из которых каждая равна нулю. Но если бы каждая точка тела S подвергалась действию силы, равной нулю (т. е. была бы свободна от действия каких бы то ни было сил), то система находилась бы, очевидно, в равновесии. Поэтому на основании теоремы предыдущего пункта она будет находиться также в равновесии под действием сил $\boldsymbol{F}$ и f, эквивалентных системе, состоящей только из сил, в отдельности равных нулю.

Поэтому заключаем, что для твердых тел необходимые и достаточные условия равновесия выражаются двумя векторными уравнениями (1) или шестью эквивалентными им скалярными уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} &\sum X = 0, \quad \sum Y = 0, \quad \sum Z = 0; \\ &\sum (yZ - zY) = 0, \quad \sum (zX - xZ) = 0, \quad \sum (xY - yX) = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (1')$$

где суммирование распространяется на те точки твердого тела, к которым приложены внешние силы, и суммы должны быть заменены интегралами, распространенными на область (одного, двух или трех измерений), когда эти точки распределены непрерывно.

В частных случаях уравнения (1′) можно свести к меньшему числу, так как некоторые из них могут удовлетворяться тождественно. Например, если все внешние силы действуют в одной и той же плоскости π, то в той же плоскости лежит и их результирующая сила $\boldsymbol{R}$, тогда как результирующий момент $\boldsymbol{M}$ (по отношению к какому угодно центру, взятому в плоскости π) будет перпендикулярен к этой плоскости; поэтому если π выбрать за координатную плоскость $z = 0$, то равенства (1′) приведутся к трем уравнениям

$$\sum X = 0, \qquad \sum Y = 0, \qquad \sum (xY - yX) = 0.$$

§ 3. Равновесие несвободных твердых тел

4. Твердое тело S может быть подчинено не только внутренним связям неизменяемости, но и *внешним связям*, осуществляемым, например, посредством соприкосновения с другими твердыми телами или посредством сферических или цилиндрических шарниров, делающих неподвижной точку или прямую тела, и т. д. В каждом из этих случаев, если мы хотим применить к твердому телу S, находящемуся под действием заданной системы сил, основные условия, необходимые и достаточные для равновесия, то к внешним силам нужно причислить также и реакции связей, наложенных на тело; поэтому внешние силы, как это уже указывалось в п. 2 предыдущей главы, будут разбиваться на две категории:

1) *активные*, или *прямо приложенные, силы*, которые будем обозначать вообще через $\boldsymbol{F}$;

2) *реакции связей*, которые мы будем обозначать через $\boldsymbol{\Phi}$.

Условия равновесия (1) или (1′) содержат в себе как силы $\boldsymbol{F}$, так и силы $\boldsymbol{\Phi}$. Однако известными являются только активные силы $\boldsymbol{F}$ и способ осуществления внешних связей, но не соответствующие реакции $\boldsymbol{\Phi}$, которые входят в задачу в виде *вспомогательных неизвестных*.

Поэтому во всяком конкретном случае нужно прежде всего выяснить по заданным силам, возможно ли равновесие, т. е. нужно определить условия равновесия, выраженные посредством только известных элементов; затем нужно определить также и неизвестные реакции $\boldsymbol{\Phi}$ или, по крайней мере, установить соотношения между реакциями и приложенными силами $\boldsymbol{F}$. Исследование, относящееся к реакциям, может быть опущено, если для изучаемой задачи достаточно определить поведение активных сил при равновесии.

5. Твердое тело с одной закрепленной точкой. Пусть точка O твердого тела S закреплена. Примером такого тела является рычаг или вообще тяжелое тело, подвешенное на крюке посредством колечка O, неизменно связанного с телом. Если считать колечко и крюк точками, то можно сказать, что неподвижность точки O тела будет обеспечена, каковы бы ни были силы, действующие на тело, лишь бы они не могли разорвать колечко, или сломать крюк, или вызвать у них заметные деформации.

Если к телу S приложены известные заданные силы $\boldsymbol{F}$, то для того, чтобы учесть все внешние силы, действующие на S, мы должны присоединить к силам $\boldsymbol{F}$ реакцию $\boldsymbol{\Phi}$, возникающую в точке O благодаря действию устройства, обеспечивающего неподвижность тела. Если обозначим через $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{M}$ результирующую силу и результирующий момент *относительно* точки O одних только активных сил $\boldsymbol{F}$, то необходимые и достаточные условия для равновесия твердого тела (так как момент реакции $\boldsymbol{\Phi}$ относительно O равен нулю) примут вид

$$\boldsymbol{R}+\boldsymbol{\Phi}=0, \tag{2}$$

$$\boldsymbol{M}=0. \tag{3}$$

Последнее из этих уравнений показывает, что при равновесии тела результирующий момент активных сил относительно неподвижной точки равен нулю, или, другими словами, совокупность активных сил векторно эквивалентна одной силе $\boldsymbol{R}$, приложенной в точке O (гл. I, п. 39).

Легко видеть, что условие (3) достаточно для равновесия; это доказывается на основании теоремы п. 2, согласно которой для равновесия достаточно, чтобы уравновешивалась система сил, векторно эквивалентная действительной системе (которая в настоящем случае состоит из сил $\boldsymbol{F}$, силы $\boldsymbol{\Phi}$ и из внутренних сил $\boldsymbol{f}$).

Примем в качестве системы, эквивалентной силам $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{f}$ (эти последние в их совокупности эквивалентны нулю), силу $\boldsymbol{R}$, приложенную в неподвижной точке O. Точка O будет находиться тогда под действием *равнодействующей* $\boldsymbol{R}+\boldsymbol{\Phi}$ сил $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{\Phi}$, а так как эта точка, по предположению, неподвижна, то уравнение (2) должно удовлетворяться и, следовательно, тело S должно находиться в равновесии.

Обыкновенно говорят более коротко: *если условие* (3) *удовлетворяется, то система активных сил эквивалентна одной силе, приложенной в неподвижной точке O; эта сила уравновешивается реакцией в неподвижной точке.*

Эта краткая формулировка, полное обоснование которой при помощи постулатов содержится в приведенных выше рассуждениях, отвечает нашим непосредственным физическим представлениям и оказывается удобной в приложениях, поэтому ее полезно запомнить.

Таким образом, *условие* (2) *не накладывает никаких ограничений на активные силы $\boldsymbol{F}$ и служит только для определения реакции $\boldsymbol{\Phi}$ в неподвижной точке O. Условием, необходимым и достаточным для равновесия, является условие* (3), *т. е. обращение в нуль результирующего момента всех прямо приложенных сил относительно закрепленной точки.*

6. Твердое тело с закрепленной осью. Предположим, что неподвижность оси обеспечивается специальными приспособлениями, которые закрепляют две или большее число её точек; закрепленных точек может быть и бесконечно большое число; они составляют тогда один или несколько отрезков. Физическими моделями твердого тела с закрепленной осью могут служить: крышка ящика, имеющая два шарнира (петли), мельничное колесо, маховое колесо. Дверь или створку окна нельзя, вообще говоря, рассматривать как твердое тело с закрепленной осью; ось в этом случае может скользить вдоль самой себя (в определенную сторону), так как двери или створки окон в большинстве случаев устраиваются так, чтобы их можно было снимать с петель, поднимая в направлении оси.

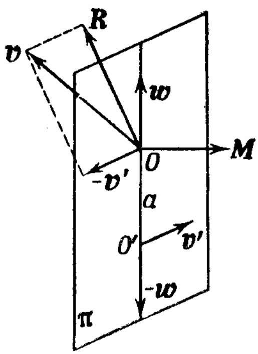
Пусть S — твердое тело, которое может вращаться вокруг неподвижной оси a, неизменно связанной с телом. Обозначим через $\boldsymbol{F}$ действующие на тело внешние *активные* силы. Реакции связей $\boldsymbol{\Phi}$ приложены в точках оси a и потому их моменты относительно этой оси равны нулю. Для равновесия необходимо, чтобы обращался в нуль результирующий момент всех внешних сил относительно какой угодно точки, а потому и относительно какой угодно прямой и, в частности, относительно этой оси; поэтому, обозначая через M_a результирующий момент сил $\boldsymbol{F}$ относительно оси a, заключаем, что *необходимое условие для равновесия* имеет вид

$$M_a = 0. \tag{4}$$

7. Только что полученный результат можно обратить, т. е. можно доказать, что условие (4) является также и достаточным для равновесия. Но для этой цели необходимо сделать некоторые предварительные замечания о векторах.

Если векторы системы Σ все приложены в точках некоторой прямой a, то момент каждого из них относительно этой прямой равен нулю, а потому будет равен нулю также и результирующий момент M_a системы Σ относительно этой прямой. Другими словами, если за центр приведения берется произвольная точка O на прямой a, то результирующий момент $\boldsymbol{M}$ системы Σ относительно O будет перпендикулярен к a.

Здесь важно обратить внимание на то, что это является единственной особенностью систем векторов, приложенных в точках какой-нибудь прямой, т. е. если, задав прямую a, мы возьмем два произвольных вектора $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{M}$ (фиг. 31) при единственном условии, что второй должен быть перпендикулярен к a, то найдется бесконечно большое число (эквивалентных между собой) систем векторов, приложенных в точках прямой a, имеющих при произвольном центре приведения O на прямой a результирующим вектором $\boldsymbol{R}$ и результирующим моментом $\boldsymbol{M}$.



Фиг. 31.

Начнем с доказательства того, что существует бесконечно много таких систем, состоящих только из двух векторов, приложенных соответственно в точке O и в другой точке O', выбранной произвольно на заданной прямой a. Проведем через точку O плоскость π, перпендикулярную к вектору $\boldsymbol{M}$ и поэтому содержащую прямую a, которая предполагается перпендикулярной к этому вектору, и рассмотрим в плоскости π два вектора $-\boldsymbol{v}'$ и $\boldsymbol{v}'$, однозначно определяющиеся тем, что они должны быть приложены соответственно в точках O и O' в направлении, перпендикулярном к a, и составлять пару с моментом $\boldsymbol{M}$ (гл. I, п. 47). Система, составленная из векторов $\boldsymbol{R}$ и $-\boldsymbol{v}'$, приложенных в O, и из вектора $\boldsymbol{v}'$, приложенного в O', имеет, очевидно, относительно O результирующий вектор $\boldsymbol{R}$ и результирующий момент $\boldsymbol{M}$; таким образом, если положим $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{R} - \boldsymbol{v}'$, то система векторов $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{v}'$, приложенных соответственно в точках O и O', удовлетворяет поставленным условиям.

Наиболее общая система, состоящая только из двух векторов, приложенных в точках O и O' и имеющая относительно O результирующий вектор $\boldsymbol{R}$ и результирующий момент $\boldsymbol{M}$, получится путем присоединения к $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{v}'$ двух взаимно уравновешивающихся векторов, приложенных в O и O', т. е. (гл. I, п. 39) двух прямо противоположных векторов $\boldsymbol{w}$ и $-\boldsymbol{w}'$, имеющих линией действия прямую a. Изменяя величину w этих двух добавочных векторов, мы и получим бесконечно большое число систем из двух векторов, удовлетворяющих поставленному условию; очевидно, что произвол выбора значений величины w по существу соответствует возможности произвольного выбора направления на плоскости π двух векторов, составляющих пару с моментом $\boldsymbol{M}$.

Ясно, что мы будем иметь еще более значительный произвол, если отбросим условие, что система должна состоять только из двух векторов, так как тогда к системе из двух векторов $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{v}'$ можно будет присоединить сколько угодно векторов, приложенных в точках прямой и составляющих уравновешенную систему.

8. После этих предварительных замечаний обратимся опять к твердому телу S с закрепленной осью a и покажем, что обращение в нуль результирующего момента M_a прямо приложенных сил $\boldsymbol{F}$ относительно оси a является достаточным условием для равновесия; для этой цели воспользуемся рассуждением, аналогичным рассуждению п. 5.

Если примем условие (4), то, как это следует из предыдущего пункта, существует бесконечно много систем Σ векторов, эквивалентных системе активных сил $\boldsymbol{F}$ и приложенных к тем точкам прямой a, которые, по предположению, являются закрепленными. То же самое можно сказать и о реакциях, возникающих в этих точках. Под действием такой системы сил (активных сил и реакций, эквивалентных, если не тождественных тем, которые имеются в действительности) тело останется, очевидно, в равновесии (вспомним о том, что было сказано в п. 5 относительно реакции, возникающей в закрепленной точке, и о системе внутренних сил). Оно останется поэтому в равновесии также и под действием данных приложенных сил $\boldsymbol{F}$.

Поэтому имеем теорему: *для того чтобы силы $\boldsymbol{F}$, прямо приложенные к твердому телу с закрепленной осью, уравновешивались, необходимо и достаточно, чтобы их результирующий момент относительно этой оси был равен нулю.*

9. В случае твердого тела с одной закрепленной точкой O реакция $\boldsymbol{\Phi}$, возникающая в точке O при действии на тело системы сил, находящейся в равновесии, будет определена однозначно основными уравнениями как сила, прямо противоположная результирующей активных сил.

Если же речь идет о твердом теле с закрепленной осью, то относительно реакций, возникающих в закрепленных точках оси, основные уравнения равновесия утверждают только то, что их результирующая сила и результирующий момент (относительно данной точки) должны быть равны и прямо противоположны результирующей силе и результирующему моменту активных сил, но не дают возможности определить эти реакции в отдельных закрепленных точках оси. Таким образом, основные уравнения равновесия приводят к заключению, что в статических условиях действие связей можно заменить какой угодно из систем реакций (эквивалентных между собой), приложенных в закрепленных точках и имеющих результирующую силу и результирующий момент, прямо противоположные результирующей силе и результирующему моменту активных сил. Такое заключение, очевидно, неудовлетворительно, так как с физической точки зрения бесспорно, что при равновесии реакции всегда определяются однозначно. Мы приходим, таким образом, к новому случаю статической неопределенности, который можно сравнить со случаем, уже встречавшимся в п. 10 гл. IX; эта неопределенность происходит от того, что в принципах статики твердого тела не принимаются во внимание деформации, вызываемые силами. Это вполне допустимо в первом приближении, так как деформации вообще бывают незначительными, так что следствия, которые вытекают из этого упрощающего предположения, в достаточной степени соответствуют результатам опыта. Но нельзя претендовать на правильное и детальное отображение всех обстоятельств, связанных с рассматриваемым явлением, если мы намеренно пренебрегаем какими-либо существенными элементами этого явления. Поэтому мы не должны удивляться тому, что относительно реакций **Ф** мы в состоянии определить лишь свойства, относящиеся к ним в целом (т. е. то, что они имеют результирующую силу и результирующий момент, прямо противоположные результирующей силе и результирующему моменту активных сил **F**), и не можем указать их распределение в каждой точке. Это достигается в *теории упругости*, где как раз учитываются указанные выше деформации.

10. Рассмотрим отдельно случай, когда на оси a имеются две закрепленные точки O и O' (например, две петли двери, когда обе они закреплены; ср. замечание из п. 6). В этом случае будут действовать только две реакции: одна из них, **Ф**, приложена в O, другая, **Ф**$'$, в O'. Так как результирующая сила и результирующий момент этих реакций известны (при равновесии они соответственно равны и противоположны результирующей силе и результирующему моменту системы сил **F**), то на основании п. 7 заключаем, что неопределенность **Ф** и **Ф**$'$ в этом случае сводится к двум осевым, равным и прямо противоположным составляющим. Если бы, например, было известно, что реакция $\mathbf{\Phi}'$ нормальна к закрепленной оси, то обе реакции были бы вполне определенными.

На практике этот случай встречается тогда, когда речь идет об оси, закрепленной на одном конце O, в то время как другой конец опирается на подшипник.

Теоретически при неизменности расстояния OO' точка O' тоже будет закреплена. В действительности же указанное приспособление оставляет точке O' свободу для продольных удлинений и укорочений, которые могут иметь место благодаря несовершенной твердости оси и вытекающей из нее возможности малых упругих и термических деформаций, и позволяет избежать опасных усилий, которые могли бы появиться, если бы расстояние OO' оставалось строго неизменным.

Чтобы понять, почему при этих условиях реакция $\mathbf{\Phi}'$ в точке O' будет нормальна к оси, достаточно уподобить O' материальной точке, вынужденной оставаться на отрезке прямой (ось подшипника), и заметить, что при хорошо смазанных оси и подшипнике можно пренебречь трением (гл. IX, п. 16).

11. Твердое тело с осью, скользящей вдоль самой себя. На практике мы будем иметь такой случай, когда обе цапфы (цилиндрические) O, O' оси a тела опираются на соответствующие (цилиндрические) подшипники. Если по указанной только что причине (предыдущий пункт) можно пренебречь трением, то реакции $\mathbf{\Phi}$ и $\mathbf{\Phi}'$ в точках O, O' твердого тела должны быть перпендикулярными к оси (при этом они могут действовать по всякому направлению, нормальному к оси, и иметь любую величину); поэтому проекция их результирующей силы на ось a и результирующий момент относительно этой оси будут равны нулю. Если существует равновесие, то и активные силы $\mathbf{F}$, которые в силу основных уравнений равновесия должны составлять вместе с реакциями систему, эквивалентную нулю, будут иметь проекцию результирующей на ось a и результирующий момент относительно этой оси равными нулю. Таким образом, должны удовлетворяться два уравнения:

$$R_a = 0, \qquad M_a = 0. \tag{5}$$

Обратно, если удовлетворяются оба эти уравнения, то непосредственно из п. 7 следует (принимая во внимание отсутствие трения и перпендикулярность реакций к оси) однозначное существование двух нормальных реакций $\mathbf{\Phi}$, $\mathbf{\Phi}'$, уравновешивающих систему активных сил.

Если связи наложены не только на цапфы O и O', но также и на другие изолированные точки или на целые отрезки оси, то будут справедливы аналогичные рассуждения с единственной оговоркой, что распределение нормальных реакций (как и в случае закрепленной оси) будет неопределенным.

Таким образом, мы приходим к следующему результату: *для равновесия твердого тела, которое может вращаться вокруг некоторой оси и скользить вдоль нее, необходимо и достаточно, чтобы проекция результирующей активных сил на эту ось и результирующий момент их относительно этой оси были равны нулю.*

§ 4. Равновесие твердых тел, опирающихся на другие твердые тела

12. Если твердое тело опирается на другие тела в одной или нескольких точках, то в этих точках возникают реакции **Φ**; на основании замечаний п. 4 мы получим условия равновесия, если выразим, что система, составленная из активных сил ***F*** и реакций **Φ**, эквивалентна нулю.

На каждую из этих реакций можно распространить свойства, с которыми мы познакомились в случае одной материальной точки (см. гл. IX, п. 8). При этом мы должны опираться на один постулат, который подсказывается самой природой вещей и подтверждается ежедневным опытом, а именно: мы должны считать, что любая опора P способна обеспечить равновесие, развивая реакцию **Φ**, заранее неопределенную (и, возможно, равную нулю). Величина этой реакции зависит от действующих сил, но может быть какой угодно, а линия действия всегда остается внутри или на внешней полости конуса трения и совпадает с внешней нормалью (к телу, на котором находится опора), если опора лишена трения или рассматривается как свободная от трения (когда трение очень мало). На основании такого свойства реакции **Φ** мы всегда можем получить количественные условия равновесия, т. е. условия, которым должны удовлетворять силы ***F*** для того, чтобы вместе с реакциями **Φ** они могли составить систему, эквивалентную нулю.

Если оставаться при общих предположениях, то мы ничего уже больше не сможем прибавить к тому, что было сказано выше.

Перейдем поэтому к конкретным случаям, имеющим большой практический интерес.

13. Установим предварительно справедливость очень простого и в то же время очень важного правила, заключающегося в том, что *в вопросах статики, отвлекаясь от трения, мы всегда действуем в сторону большей надежности.*

Этим мы хотим сказать, что выводы, полученные при рассмотрении равновесия без учета трения в опорах, тем более справедливы, когда трение на самом деле имеется, и потому вполне приложимы к действительности (где в большей или меньшей степени всегда действует трение).

Убедиться в этом можно непосредственно. Достаточно обратить внимание на то, что если реакции, уравновешивающие силы ***F***