Таким образом, мы приходим к следующему результату: *для равновесия твердого тела, которое может вращаться вокруг некоторой оси и скользить вдоль нее, необходимо и достаточно, чтобы проекция результирующей активных сил на эту ось и результирующий момент их относительно этой оси были равны нулю.*

§ 4. Равновесие твердых тел, опирающихся на другие твердые тела

12. Если твердое тело опирается на другие тела в одной или нескольких точках, то в этих точках возникают реакции **Ф**; на основании замечаний п. 4 мы получим условия равновесия, если выразим, что система, составленная из активных сил ***F*** и реакций **Ф**, эквивалентна нулю.

На каждую из этих реакций можно распространить свойства, с которыми мы познакомились в случае одной материальной точки (см. гл. IX, п. 8). При этом мы должны опираться на один постулат, который подсказывается самой природой вещей и подтверждается ежедневным опытом, а именно: мы должны считать, что любая опора P способна обеспечить равновесие, развивая реакцию **Ф**, заранее неопределенную (и, возможно, равную нулю). Величина этой реакции зависит от действующих сил, но может быть какой угодно, а линия действия всегда остается внутри или на внешней полости конуса трения и совпадает с внешней нормалью (к телу, на котором находится опора), если опора лишена трения или рассматривается как свободная от трения (когда трение очень мало). На основании такого свойства реакции **Ф** мы всегда можем получить количественные условия равновесия, т. е. условия, которым должны удовлетворять силы ***F*** для того, чтобы вместе с реакциями **Ф** они могли составить систему, эквивалентную нулю.

Если оставаться при общих предположениях, то мы ничего уже больше не сможем прибавить к тому, что было сказано выше.

Перейдем поэтому к конкретным случаям, имеющим большой практический интерес.

13. Установим предварительно справедливость очень простого и в то же время очень важного правила, заключающегося в том, что *в вопросах статики, отвлекаясь от трения, мы всегда действуем в сторону большей надежности.*

Этим мы хотим сказать, что выводы, полученные при рассмотрении равновесия без учета трения в опорах, тем более справедливы, когда трение на самом деле имеется, и потому вполне приложимы к действительности (где в большей или меньшей степени всегда действует трение).

Убедиться в этом можно непосредственно. Достаточно обратить внимание на то, что если реакции, уравновешивающие силы ***F*** нормальны к поверхностям опор, то они необходимо должны лежать внутри соответствующих полостей конусов трения, как бы эти конусы ни были узки.

Таким образом, когда мы отвлекаемся от трения, то этим мы накладываем на активные силы лишние условия, благодаря чему в некотором смысле гарантируется устойчивость: имеется основание предполагать, что даже в том случае, когда эти лишние условия не будут строго выполняться, то равновесие все же будет существовать, если только речь идет о системе сил Σ', которая не отличается значительно от системы сил Σ, удовлетворяющих указанным условиям. Это следует из того, что, вообще говоря, систему Σ' можно уравновесить реакциями, приложенными в точках опоры и весьма близкими к реакциям, уравновешивающим систему Σ, т. е. лежащими во внешних полостях конусов трения, что как раз и является необходимым и достаточным для равновесия.

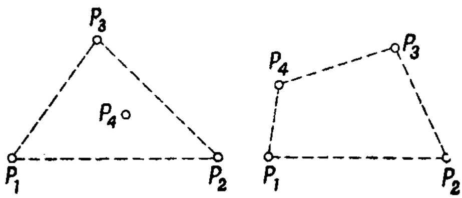
Однако важно отметить, что могут встретиться не только такие случаи, в которых трение способствует равновесию, но и такие, когда равновесие возможно только при наличии трения. Таков, например, случай лестницы, опирающейся своими концами на пол и на вертикальную стенку, который мы будем подробно рассматривать в пп. 17—18. Если бы трения вовсе не было, то равновесие было бы невозможно, как бы мало ни была наклонена лестница к вертикали: опоры не препятствовали бы ей двигаться под действием силы тяжести, скользя вдоль пола и вдоль стены. Поэтому необходимо обязательно принимать во внимание трение, когда мы замечаем, что, пренебрегая им, мы слишком удаляемся от действительности, вводя искусственные ограничения или прямо оставляя в стороне практически интересные формы равновесия.

Обратимся теперь к некоторым важным случаям, когда можно пренебречь трением, благодаря чему исследование очень упрощается.

14. Тяжелое тело на горизонтальной опорной плоскости. Пусть S есть твердое тело, опирающееся несколькими точками P на горизонтальную плоскость. Если число точек опоры конечно, то мы будем называть *опорным многоугольником* такой *выпуклый* многоугольник, имеющий все свои вершины в точках P, что ни одна из опор не остается вне его (между тем как опорные точки внутри него могут существовать). Если число точек опоры задано, то могут представиться различные случаи в отношении числа сторон периметра, в зависимости от конфигурации системы точек P. Это видно уже в простом случае четырех опор (фиг. 32), если исключить случай, когда три из них лежат на одной прямой.

Понятие опорного многоугольника легко распространяется на общий случай, когда имеется бесконечно большое число точек опоры, причем точки опоры могут составлять части линий или даже части плоскости. Необходимо только иметь в виду, что опорный многоугольник может быть ограничен частью прямолинейными отрезками, частью дугами кривых линий. Но всегда должно удовлетворяться условие, что каждая его вершина является опорой.

Каков бы ни был опорный многоугольник, во всякой точке P будет действовать некоторая реакция Φ, и если мы допустим идеальное предположение об отсутствии трения, то все эти реакции будут перпендикулярны к плоскости опоры, т. е. будут вертикальны и направлены вверх, так что в своей совокупности они составят систему параллельных и одинаково направленных сил. Какова бы ни была величина отдельных реакций, система их векторно эквивалентна их результирующей (гл. I, п. 56), приложенной в некоторой точке Q (центре реакций), которая является внутренней (или, по меньшей мере, не внешней) относительно всякой замкнутой выпуклой линии, содержащей все точки P (гл. X, п. 11), и, в частности, относительно опорного многоугольника.



Фиг. 32.

Если твердое тело находится в равновесии, то результирующая реакций должна уравновешиваться системой активных сил, которые здесь сводятся к весам отдельных материальных точек тела S; система весов отдельных материальных точек тела эквивалентна полному весу p, приложенному в центре тяжести G. Результирующая реакций в статических условиях должна быть прямо противоположна весу p, приложенному в центре тяжести G; поэтому заключаем, что вертикаль, проходящая через центр тяжести тела (линия действия p), должна проходить и через центр Q реакций, т. е. *для равновесия тяжелого твердого тела на плоской горизонтальной опоре необходимо, чтобы проекция центра тяжести на эту плоскость была внутренней (или, по меньшей мере, не внешней) для опорного многоугольника.*

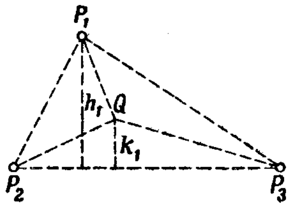
15. *Только что доказанное необходимое условие равновесия является также и достаточным.*

Для доказательства рассмотрим сначала случай только трех точек опоры P_1, P_2, P_3 и для определенности предположим, что они не лежат на одной прямой (фиг. 33), хотя рассуждение будет иметь силу, с надлежащими изменениями, также и в исключенном здесь случае.

Предположим, что проекция Q центра тяжести G твердого тела на плоскость опоры является внутренней (или, по крайней мере, не внешней) для треугольника $P_1P_2P_3$. Для того чтобы доказать, что в этом случае твердое тело находится в равновесии, покажем, что можно определить (и даже однозначно) три реакции, вертикальные и направленные вверх, $\mathbf{\Phi}_1$, $\mathbf{\Phi}_2$, $\mathbf{\Phi}_3$, которые, будучи приложены в точках P_1, P_2, P_3, в состоянии уравновесить вес твердого тела $\boldsymbol{p}$, приложенный в G, или, что одно и то же, в Q.

Для этого выразим прежде всего, что результирующий момент веса $\boldsymbol{p}$ и трех реакций $\mathbf{\Phi}_i$ $(i=1, 2, 3)$ относительно каждой из сторон треугольника, например относительно P_2P_3, равен нулю. Так как моменты реакций $\mathbf{\Phi}_2$, $\mathbf{\Phi}_3$ относительно прямой P_2P_3 равны нулю, а реакция $\mathbf{\Phi}_1$ параллельна и направлена в сторону, противоположную весу $\boldsymbol{p}$, то достаточно выразить, что равны по абсолютной величине моменты относительно P_2P_3 этих двух последних сил, т. е.

$$\Phi_1 h_1 = p k_1,$$



Фиг. 33.

где через h_1, k_1 обозначены расстояния точек P_1 и Q от стороны P_2P_3 и через Φ_1 — величина реакции $\mathbf{\Phi}_1$. Если обозначим через Δ площадь треугольника $P_1P_2P_3$, а через Δ_1, Δ_2, Δ_3 площади треугольников QP_2P_3, QP_3P_1, QP_1P_2, определяемых точкой Q, то будем иметь

$$\frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{k_1}{h_1},$$

после чего для величины Φ_1 реакции $\mathbf{\Phi}_1$ находим выражение

$$\Phi_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} p;$$

Φ_1 обращается в нуль, если $\Delta_1 = 0$, т. е. если Q лежит на стороне P_2P_3.

Аналогично будем иметь

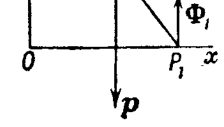
$$\Phi_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} p, \qquad \Phi_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} p.$$

Эти три реакции действительно уравновешивают вес тела $\boldsymbol{p}$, так как результирующая их прямо противоположна $\boldsymbol{p}$ $(\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = \Delta)$, а, с другой стороны, достаточно принять за центр приведения одну из трех вершин треугольника, например P_1, чтобы убедиться, что и результирующий момент силы $\boldsymbol{p}$ и реакций $\mathbf{\Phi}_i$ также равен нулю (так как равны нулю три его некомпланарные составляющие: по двум сторонам P_1P_2 и P_1P_3 в силу условий, которые мы наложили на Φ_1, Φ_2, Φ_3, и по вертикали, ввиду того что все силы вертикальны).

16. Если число опор больше трех, то условие, заключающееся в том, что проекция центра тяжести на опорную плоскость не лежит вне опорного многоугольника, тоже всегда обеспечивает равновесие. В этом можно убедиться, предположив, например, все реакции равными нулю, за исключением трех, и обращаясь к предыдущему случаю; достаточно выбрать, что всегда возможно, три соответствующие опоры таким образом, чтобы проекция центра тяжести не была внешней для построенного на них треугольника.

Однако ясно, что в этом случае (т. е. в случае числа точек опоры, большего трех) распределение реакций не может быть определено на основании чисто статических условий равновесия недеформируемых тел, и эта неопределенность будет тем большей, чем больше имеется точек опоры. Здесь, как и в случае твердого тела, имеющего больше двух закрепленных точек, лежащих на одной прямой (п. 9), для устранения неопределенности необходимо обратиться к новым данным опыта, дополняющим данные, полученные из предельных предположений совершенной твердости (см. по этому поводу упражнение 26, стр. 145).

17. Состояние равновесия, зависящее исключительно от трения в опорах. Покажем теперь на примере, что иногда, как мы уже отмечали в п. 13, равновесие опертого твердого тела обеспечивается исключительно трением в опорах, так что физически оказываются возможными условия равновесия, которые исключались бы при идеальном предположении об отсутствии трения.

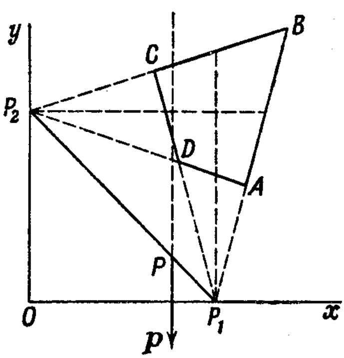


Фиг. 34.

Рассмотрим лестницу, опирающуюся на пол наклонно к нему и на вертикальную стену. Число опор, соответствующих концам двух стоек лестницы, равно четырем; но вследствие геометрической и материальной симметрии фигуры относительно вертикальной плоскости, равноотстоящей от стоек, мы можем рассматривать задачу схематически, представляя себе лестницу в виде *твердого тяжелого стержня*, расположенного в вертикальной плоскости и опирающегося в двух точках P_1 и P_2 соответственно на горизонтальную прямую Ox и на вертикальную прямую Oy (фиг. 34). Допустим, что на какую-то ступеньку лестницы поднялся человек. Веса лестницы и человека эквивалентны их результирующей p, которую можно представить себе приложенной в центре тяжести системы, состоящей из лестницы и человека, или перенесенной вдоль линии ее действия в точку P, в которой вертикаль, проходящая через центр тяжести, пересекает P_1P_2 (п. 2). Точка P, очевидно, будет лежать внутри отрезка P_1P_2.

Для равновесия необходимо и достаточно, чтобы сила p и обе реакции Φ_1 и Φ_2, приложенные в точках P_1 и P_2, составляли уравновешенную систему или же (гл. I, п. 51) чтобы линии действия трех сил пересекались в одной точке (так как возможность параллельности здесь исключается) и чтобы, кроме того, результирующая реакций Φ_1 и Φ_2 была прямо противоположна полному весу $\boldsymbol{p}$.

Если мы допустим теперь, что опоры в точках P_1 и P_2 абсолютно гладкие, то обе реакции Φ_1 и Φ_2 будут направлены по перпендикулярам в плоскости фигуры соответственно к Ox, Oy, пересекающимся в точке Q, через которую не может пройти линия действия полного веса, параллельная прямой QP_1 и пересекающая отрезок P_1P_2 во *внутренней* точке P; поэтому предположение об отсутствии трения приводит к парадоксальному заключению, что лестница, опирающаяся на пол и на стену, не может оставаться в равновесии. Аналогично мы увидим, что только одно трение о стену не было бы достаточным для обеспечения равновесия.



Фиг. 35.

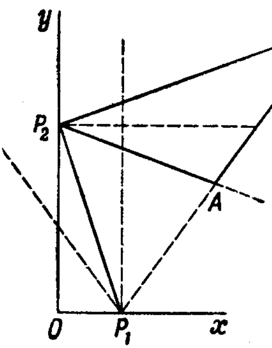
Парадокс объясняется тем обстоятельством, что как раз трение об опоры и делает возможными те состояния равновесия, которые мы наблюдаем на каждом шагу. Для того чтобы сформулировать соответствующие условия равновесия, обратим внимание на трение в точках P_1, P_2 и рассмотрим внешние полости конусов трения, каждая из которых будет пересекаться плоскостью фигуры по двум образующим, симметрично расположенным относительно соответствующей нормали. В этой плоскости получаются таким образом два *угла трения*, которые определят некоторый четырехугольник $ABCD$ (фиг. 35) (или треугольник, если лестница составляет с вертикалью угол, меньший угла трения о пол, или с горизонталью угол, меньший угла трения о стену). Условие, необходимое и достаточное для равновесия, заключается в том, чтобы полный вес мог быть уравновешен двумя реакциями, пересекающимися в одной из точек его линии действия (вертикаль через центр тяжести) и лежащими внутри соответствующих углов трения, или, другими словами, *условие, необходимое и достаточное для равновесия лестницы, состоит в том, чтобы вертикаль, проходящая через центр тяжести, имела, по крайней мере, одну общую точку с четырехугольником (или с треугольником), общим для обоих углов трения.*

Если в случае четырехугольника эта вертикаль проходит через вершину C, более близкую к оси y, то обе реакции будут определены однозначно, поскольку они должны иметь линиями действия

P_1C и P_2C, и их результирующая должна быть прямо противоположной полному весу.

Во всех других случаях равновесия вертикаль, проходящая через центр тяжести, имеет с четырехугольником (или с треугольником) общим целый отрезок, на котором точку пересечения линий действия двух реакций можно выбрать произвольно; поэтому последние не могут быть определены однозначно (ср. предыдущий пункт).

18. На практике интересно знать, при каких условиях можно подняться до самой вершины лестницы, не опасаясь скольжения, или, иначе, при каком наибольшем наклоне лестница остается в равновесии при любом положении на ней человека.



Фиг. 36.

Предположив для простоты, что пол и стена имеют одинаковые коэффициенты трения, легко понять, что лестница, наверное, останется в равновесии, если она образует с вертикалью угол α, меньший угла трения φ $(f=\operatorname{tg}\varphi)$. Действительно, в таком случае общая плоская область для обоих углов трения есть такой треугольник P_2AB (фиг. 36), что вертикаль, проведенная через любую точку отрезка P_1P_2, будет иметь с этим треугольником общий отрезок (или, по крайней мере, точку, если речь идет о вертикали точки P_2).

Если, далее, угол α лестницы с вертикалью больше угла φ (см. фиг. 35), то точка из общей области двух углов трения, наиболее близкая к стене, будет точкой пересечения C верхней стороны угла трения о стену с левой стороной угла трения о пол, так что для равновесия необходимо и достаточно, чтобы вертикаль, проходящая через центр тяжести, не лежала между точкой C и стеной. Если теперь примем в качестве положительных полуоси Ox, Oy и обозначим через l и m длину и массу лестницы и через m_1 и x_1 массу и абсциссу человека, то будем иметь прежде всего

$$OP_1 = l\sin\alpha, \qquad OP_2 = l\cos\alpha,$$

и для абсциссы центра тяжести системы, состоящей из лестницы и человека, получим выражение

$$\frac{\frac{1}{2}ml\sin\alpha + m_1x_1}{m+m_1},$$

тогда как точка C, как пересечение прямых P_2B, P_1D, определяемых соответственно уравнениями

$$y - l\cos\alpha = fx, \qquad y = -\frac{x - l\sin\alpha}{f},$$

будет иметь абсциссой

$$l\,\frac{\sin\alpha - f\cos\alpha}{1+f^2} = l\cos\varphi\sin(\alpha-\varphi).$$

Поэтому условие равновесия выражается соотношением

$$\frac{\frac{1}{2}ml\sin\alpha + m_1x_1}{m+m_1} \geqslant l\cos\varphi\sin(\alpha-\varphi).$$

Если мы хотим, чтобы равновесие существовало, каково бы ни было положение человека на лестнице, то необходимо, чтобы предыдущее соотношение удовлетворялось при $x_1 = 0$; тогда оно будет удовлетворяться и для всякого другого значения (положительного) x_1. Таким образом, должно удовлетворяться соотношение

$$\frac{m\sin\alpha}{2(m+m_1)} \geqslant \cos\varphi\sin(\alpha-\varphi).$$

Разделив обе части его на $^1/_2\cos\alpha$ и выделив член $\sin 2\varphi$, найдем

$$\left\{2\cos^2\varphi - \frac{m}{m+m_1}\right\}\operatorname{tg}\alpha \leqslant \sin 2\varphi.$$

Коэффициент при $\operatorname{tg}\alpha$ несомненно положителен, поскольку при $\varphi < \pi/4$ имеем неравенство $2\cos^2\varphi > 1$, тогда как вычитаемое $m/(m+m_1)$ меньше единицы.

Поэтому обе части неравенства можно разделить на коэффициент при $\operatorname{tg}\alpha$, решая его относительно $\operatorname{tg}\alpha$, а это дает для α искомое неравенство

$$\operatorname{tg}\alpha \leqslant \frac{\sin 2\varphi}{2\cos^2\varphi - \dfrac{m}{m+m_1}}.$$

§ 5. Устойчивость равновесия твердого тела

19. Чтобы показать, как в некоторых случаях можно оценить количественно устойчивость равновесия твердого тела, рассмотрим задачу, в которой встречаются одновременно связи обоих видов, изученные в предыдущих параграфах, т. е. тело имеет закрепленные точки и точки опоры. Именно, рассмотрим твердое тело S, имеющее закрепленную ось a и одну или больше опор на плоскости π, проходящей через ось, и для определенности предположим, что плоскость π (а следовательно, и ось a) горизонтальна и что твердое тело опирается на верхнюю сторону плоскости π, как это