тогда как точка C, как пересечение прямых P_2B, P_1D, определяемых соответственно уравнениями

$$y - l\cos\alpha = fx, \qquad y = -\frac{x - l\sin\alpha}{f},$$

будет иметь абсциссой

$$l\,\frac{\sin\alpha - f\cos\alpha}{1+f^2} = l\cos\varphi\sin(\alpha-\varphi).$$

Поэтому условие равновесия выражается соотношением

$$\frac{\frac{1}{2}ml\sin\alpha + m_1x_1}{m+m_1} \geqslant l\cos\varphi\sin(\alpha-\varphi).$$

Если мы хотим, чтобы равновесие существовало, каково бы ни было положение человека на лестнице, то необходимо, чтобы предыдущее соотношение удовлетворялось при $x_1 = 0$; тогда оно будет удовлетворяться и для всякого другого значения (положительного) x_1. Таким образом, должно удовлетворяться соотношение

$$\frac{m\sin\alpha}{2(m+m_1)} \geqslant \cos\varphi\sin(\alpha-\varphi).$$

Разделив обе части его на $^1/_2\cos\alpha$ и выделив член $\sin 2\varphi$, найдем

$$\left\{2\cos^2\varphi - \frac{m}{m+m_1}\right\}\operatorname{tg}\alpha \leqslant \sin 2\varphi.$$

Коэффициент при $\operatorname{tg}\alpha$ несомненно положителен, поскольку при $\varphi < \pi/4$ имеем неравенство $2\cos^2\varphi > 1$, тогда как вычитаемое $m/(m+m_1)$ меньше единицы.

Поэтому обе части неравенства можно разделить на коэффициент при $\operatorname{tg}\alpha$, решая его относительно $\operatorname{tg}\alpha$, а это дает для α искомое неравенство

$$\operatorname{tg}\alpha \leqslant \frac{\sin 2\varphi}{2\cos^2\varphi - \frac{m}{m+m_1}}.$$

§ 5. Устойчивость равновесия твердого тела

19. Чтобы показать, как в некоторых случаях можно оценить количественно устойчивость равновесия твердого тела, рассмотрим задачу, в которой встречаются одновременно связи обоих видов, изученные в предыдущих параграфах, т. е. тело имеет закрепленные точки и точки опоры. Именно, рассмотрим твердое тело S, имеющее закрепленную ось a и одну или больше опор на плоскости π, проходящей через ось, и для определенности предположим, что плоскость π (а следовательно, и ось a) горизонтальна и что твердое тело опирается на верхнюю сторону плоскости π, как это имеет место, например, у крышки на шарнирах, когда она опирается на стенки соответствующего ящика. Наконец, представим себе, что ось a направлена в ту сторону, относительно которой вращение тела S, допускаемое плоскостью опоры, оказывается правым.

Заметим, далее, что если бы опора отсутствовала и, следовательно, речь шла просто о твердом теле с закрепленной осью, то необходимое и достаточное условие равновесия заключалось бы в равенстве нулю результирующего момента активных сил относительно оси (п. 8). Мы можем свести задачу как раз к этому случаю, рассматривая временно в качестве активных сил реакции Φ, происходящие от опор. Таким образом, обозначая через M_a и M_a' результирующие моменты относительно оси a активных сил и соответственно реакций опоры Φ, заключаем, что необходимое и достаточное условие для равновесия нашего твердого тела имеет вид

$$M_a + M_a' = 0. \tag{6}$$

Реакции опоры Φ являются неизвестными; следовательно, неизвестен и их результирующий момент M_a'. Независимо от того, имеется или нет трение в опорах, известно, что всякая отдельная реакция Φ, не равная нулю, направлена в ту сторону от плоскости π, в которую тело S может вращаться, или, другими словами, всякая реакция стремится сообщить телу правое вращение относительно направленной оси a, так что несомненно будем иметь

$$M_a' \geqslant 0;$$

отсюда и из уравнения (6) следует, что для равновесия тела S *необходимо*, чтобы активные силы удовлетворяли условию

$$M_a \leqslant 0. \tag{7}$$

20. Докажем, что условие (7) оказывается также и достаточным для обеспечения равновесия. Для этой цели достаточно убедиться, что всякий раз как удовлетворяется неравенство (7), возможно определить каким-либо образом реакции Φ отдельных опор так, чтобы удовлетворить условию (6), достаточному для равновесия, а также, конечно, общим требованиям статики опертых твердых тел (п. 12).

Начиная со случая, когда вне оси a имеется только одна точка опоры P и опора абсолютно гладкая, легко увидим, что при выполнении условия (7) единственная реакция Φ, способная обеспечить равновесие, будет однозначно определена. Действительно, реакция Φ, как перпендикулярная к плоскости π и правая относительно направленной оси a, имеет по отношению к ней момент $h\Phi$, если через h обозначим расстояние точки P от оси; достаточно будет взять для Φ значение (положительное или нуль) — M_a/h для того, чтобы было удовлетворено условие равновесия (6).

Если, далее, окажется, что в единственной опоре P имеется трение, то для равновесия достаточно будет, чтобы нормальная составляющая реакции имела только что определенное значение; момент касательной реакции относительно оси a в любом случае равен нулю, поэтому касательная реакция будет оставаться неопределенной, однако при соблюдении условия, что полная реакция не выходит из внешней полости конуса трения.

Наконец, если имеется несколько опор с трением или без него, то при наличии условия (7) всегда можно будет бесконечным множеством способов выбрать систему реакций, результирующий момент которых относительно оси был бы равен M_a. Достаточно, например, предположить все реакции равными нулю, за исключением одной, которая определяется способом, указанным выше, в предположении, что имеется только одна опора. Равновесие оказывается поэтому действительно обеспеченным соотношением (7); во всех случаях, за исключением одного, рассмотренного выше (когда имеется только одна опора и притом абсолютно гладкая), мы встречаемся с неопределенностью реакций, которую нельзя устранить, если не обращаться к соображениям, выходящим за пределы статики твердых тел.

21. Из соотношения (7) следует, что равновесие твердого тела, имеющего закрепленную ось и опирающегося на плоскость, может быть нарушено только такими активными силами, результирующий момент которых относительно этой оси (ориентированной так, как мы условились выше) положителен. Поэтому можно сказать, что заданное состояние равновесия будет тем далее от этого опасного случая, чем больше абсолютная величина $|M_a|$ момента (самого по себе отрицательного) активных сил; естественно поэтому принять число $|M_a|$ за меру *устойчивости* рассматриваемого состояния равновесия. Число $|M_a|$ определяет наибольшее значение, которого может достичь без нарушения равновесия момент относительно оси случайных сил, т. е. сил, не причисляемых заранее к активным силам.

Это число $|M_a|$ называется *моментом устойчивости* равновесия твердого тела, имеющего закрепленную ось и опирающегося на плоскость.

22. Рассуждения предыдущего пункта можно распространить на случай твердого тела, опорный многоугольник которого (прямолинейный или криволинейный, но во всяком случае выпуклый) на плоскости π окружен со всех сторон малыми выступами, так что тело не может скользить по плоскости, а может только поворачиваться вокруг любой из его сторон или вокруг любой из его касательных. Будем вообще обозначать через a те прямые, вокруг которых тело может опрокидываться. Что же касается вопроса о том, будет ли тело в действительности опрокидываться, если оно подвергается действию заданной системы активных сил, то здесь дело будет обстоять так же, как и в случае твердого тела, имеющего закрепленную ось и опирающегося на плоскость (пп. 19—21). Поэтому, если представим себе все прямые a направленными в ту сторону, по отношению к которой опрокидывание, возможное для твердого тела, окажется правым, то для равновесия потребуется, чтобы результирующий момент активных сил относительно всякой отдельно взятой прямой a был отрицательным (или равным нулю). Вследствие этого в статических условиях будет законно назвать *моментом устойчивости* рассматриваемого состояния равновесия наименьшее абсолютное значение этих результирующих (отрицательных) моментов активных сил относительно различных прямых a.

В частности (если иметь в виду конкретные задачи, которые находят здесь свое схематическое представление), оказывается интересным случай тяжелого твердого тела S, которое опирается на *горизонтальную плоскость* так, что центр тяжести его проектируется внутрь опорного многоугольника или на его контур. При этом предполагается, что на центр тяжести, помимо собственного веса тела, действует горизонтальная сила, которая стремится опрокинуть тело.

Чтобы выразить точно условие равновесия, заметим, что если мы будем выбирать принятым ранее способом стороны обращения отдельных прямых a, то вес тела S, приложенный в центре тяжести, который, по предположению, проектируется внутрь или на контур опорного многоугольника, будет левовращающим по отношению ко всем этим ориентированным прямым (или, в исключительном случае, будет пересекать одну из них); поэтому относительно каждой из прямых a вес будет иметь отрицательный (или равный нулю) момент, в то время как момент горизонтальной силы может быть положительным или отрицательным (или равным нулю), в зависимости от рассматриваемой прямой. Если обозначим через $-R_a$ и T_a моменты веса и горизонтальной силы относительно любой прямой a, то для равновесия твердого тела будет необходимо и достаточно, чтобы для всех отдельных прямых удовлетворялось условие

$$M_a = T_a - P_a \leqslant 0. \tag{7'}$$

Если сила действует в какой-нибудь проходящей через центр вертикальной плоскости, то предыдущее условие можно выразить словами так: *линия действия равнодействующей веса и горизонтальной силы должна пересекать плоскость опоры в точке, внутренней (или, по крайней мере, не внешней) для опорного многоугольника.*

тельных. Будем вообще обозначать через a те прямые, вокруг которых тело может опрокидываться. Что же касается вопроса о том, будет ли тело в действительности опрокидываться, если оно подвергается действию заданной системы активных сил, то здесь дело будет обстоять так же, как и в случае твердого тела, имеющего закрепленную ось и опирающегося на плоскость (пп. 19—21). Поэтому, если представим себе все прямые a направленными в ту сторону, по отношению к которой опрокидывание, возможное для твердого тела, окажется правым, то для равновесия потребуется, чтобы результирующий момент активных сил относительно всякой отдельно взятой прямой a был отрицательным (или равным нулю). Вследствие этого в статических условиях будет законно назвать *моментом устойчивости* рассматриваемого состояния равновесия наименьшее абсолютное значение этих результирующих (отрицательных) моментов активных сил относительно различных прямых a.

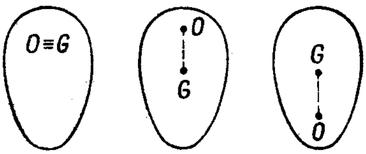
В частности (если иметь в виду конкретные задачи, которые находят здесь свое схематическое представление), оказывается интересным случай тяжелого твердого тела S, которое опирается на *горизонтальную плоскость* так, что центр тяжести его проектируется внутрь опорного многоугольника или на его контур. При этом предполагается, что на центр тяжести, помимо собственного веса тела, действует горизонтальная сила, которая стремится опрокинуть тело.

Чтобы выразить точно условие равновесия, заметим, что если мы будем выбирать принятым ранее способом стороны обращения отдельных прямых a, то вес тела S, приложенный в центре тяжести, который, по предположению, проектируется внутрь или на контур опорного многоугольника, будет левовращающим по отношению ко всем этим ориентированным прямым (или, в исключительном случае, будет пересекать одну из них); поэтому относительно каждой из прямых a вес будет иметь отрицательный (или равный нулю) момент, в то время как момент горизонтальной силы может быть положительным или отрицательным (или равным нулю), в зависимости от рассматриваемой прямой. Если обозначим через $-R_a$ и T_a моменты веса и горизонтальной силы относительно любой прямой a, то для равновесия твердого тела будет необходимо и достаточно, чтобы для всех отдельных прямых удовлетворялось условие

$$M_a = T_a - P_a \leqslant 0. \tag{7'}$$

Если сила действует в какой-нибудь проходящей через центр вертикальной плоскости, то предыдущее условие можно выразить словами так: *линия действия равнодействующей веса и горизонтальной силы должна пересекать плоскость опоры в точке, внутренней (или, по крайней мере, не внешней) для опорного многоугольника.*

Во втором случае, как бы ни двигалось тело около точки O, центр тяжести G поднимается, так как должен оставаться на одном и том же расстоянии от O и, следовательно, двигаться по сфере, самой низкой точкой которой является его исходное положение, находящееся под точкой O на одной с ней вертикали. Отсюда следует, что при движении тела от любого положения до положения равновесия вес совершает положительную работу. Равновесие поэтому оказывается *устойчивым*. Подобным же образом устанавливается, что в третьем случае мы имеем существенно неустойчивое равновесие.



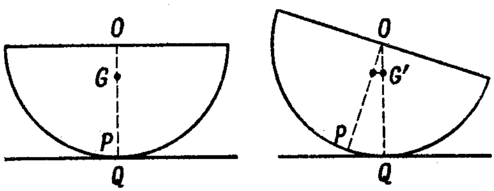
Фиг. 37.

б) *Однородная полусфера на горизонтальной, абсолютно гладкой плоскости.* Предположим, что однородная тяжелая полусфера с центром в O находится в равновесии, опираясь своим полюсом P на горизонтальную плоскость в некоторой произвольной точке Q этой плоскости (фиг. 38).

При этих условиях ось симметрии PO полусферы будет вертикальна, и так как вследствие однородности твердого тела центр тяжести G лежит на PO, то вес и реакция прямо противоположны друг другу. Любое перемещение полусферы, не нарушающее ее соприкосновения с плоскостью, можно получить, комбинируя перемещения двух следующих типов.

1. Заставить полусферу скользить по плоскости так, чтобы соприкосновение происходило постоянно в P и, следовательно, ось PO оставалась вертикальной.

2. Оставляя неизменной точку прикосновения Q плоскости, наклонить ось PO полусферы, устанавливая соприкосновение с плоскостью в другой точке полусферы, отличной от P.



Фиг. 38.

Ясно, что на всех этих перемещениях реакция плоскости опоры (всегда нормальная к ней) совершает работу, равную нулю, так что достаточно обратиться к весам. Работа веса в первом случае равна нулю. Во втором случае в конце перемещения центр тяжести G будет находиться на некоторой высоте над плоскостью опоры, большей высоты GP, на которой он находился в состоянии равновесия. Действительно (см. фиг. 38, правую часть), проектируя G на вертикаль OQ в G', необходимо будем иметь $OG' < OG$ и, следовательно,

$$G'Q = OQ - OG' > OQ - OG,$$

Из соотношения (7′), которое можно написать в виде

$$T_a \leqslant P_a,$$

мы замечаем, что в случае равновесия для всякой прямой a, относительно которой момент горизонтальной силы T_a будет положительным, отношение P_a/T_a будет больше или, по меньшей мере, равно единице; чем больше это отношение, тем лучше тело предохранено от опасности опрокидывания вокруг соответствующей прямой a. Поэтому в случае равновесия минимум положительных отношений P_a/T_a называется *коэффициентом устойчивости.*

23. Как и в случае точки, мы не всегда в состоянии количественно оценить устойчивость равновесия твердого тела, но в каждом данном случае можно придти к качественной оценке, определяя на основании критерия, указанного в п. 18 гл. IX, какое равновесие имеет место в этом случае: *устойчивое, неустойчивое или безразличное.* Применим этот критерий к двум особенно простым случаям.

а) *Тяжелое твердое тело с закрепленной точкой.* Если тело находится в равновесии, то результирующий момент активных сил относительно закрепленной точки O должен обращаться в нуль. Заметим теперь, что внутренние силы и реакция в точке O не совершают никакой работы при всяком перемещении тела, не нарушающем неподвижности точки O. Это очевидно для реакции, так как точка приложения ее не перемещается; что же касается внутренних сил, то они эквивалентны нулю (в смысле теории векторов), и, как мы докажем в гл. XV, *эта эквивалентность нулю системы сил достаточна в случае твердых тел* (однако, вообще говоря, не для каких угодно систем) для того, чтобы работа, совершаемая ими, равнялась нулю.

Здесь мы допустим это и заметим, что если для твердого тела, закрепленного в точке O, активные силы сводятся к весу, то в положении равновесия центр тяжести G должен находиться на вертикали, проходящей через закрепленную точку O. При этом необходимо различать три случая, в зависимости от того, совпадает ли G с O, находится ли G ниже или выше O (фиг. 37).

В первом случае при всяком перемещении твердого тела, совместимом со связями (т. е. при всяком перемещении, которое оставляет неподвижной закрепленную точку), центр тяжести G остается неподвижным, а, следовательно, работа веса равна нулю [1]). Речь идет поэтому о *безразличном* равновесии.

---

[1]) На самом деле, вес распределен между отдельными элементами тела и только эквивалентен одной силе (в смысле теории векторов), приложенной к центру тяжести. Но этого, как мы только что видели, и достаточно для того, чтобы можно было вычисление работы отнести к такой единственной силе.