С другой стороны, из активных сил такому же условию удовлетворяет вес, так как он пересекает прямую g, тогда как сила τ всегда имеет относительно g момент (по абсолютному значению равный $R\tau$), отличный от нуля. Таким образом, ввиду того что результирующий момент всех внешних сил относительно прямой g не равен нулю, мы приходим к заключению, что равновесие невозможно, как бы мала ни была сила τ.

25. Для того чтобы устранить это противоречие между опытными данными и теоретическими выводами, основанными на предположениях „а" и „б", нужно отказаться по крайней мере от одного из них.

Мы уже не раз отмечали, что абсолютная недеформируемость твердых тел с физической точки зрения недопустима. Легко видеть, что, отказываясь от предположения „а" абсолютной твердости, можно сохранить предположение „б", не впадая в противоречия. В самом деле, допустив, что у цилиндра (или у пола, или у того и другого) возникает какая-то деформация, так что соприкосновение имеет место не только по одной прямой g, но по целой площадке (узкая полоска, содержащая прямую g), мы увидим, что момент реакций относительно прямой g уже не должен обязательно обращаться в нуль; основываясь на этом допущении, можно также очень хорошо объяснить (при помощи обычных законов трения скольжения), почему вес и достаточно малое натяжение τ уравновешиваются.

Однако отказ от предположения об абсолютной твердости, которое, естественно, напрашивается при оценке данных опыта в первом приближении, вызвал бы полный и коренной пересмотр тех общих принципов статики твердого тела (вспомним, например, о доказательстве достаточности основных условий), которые позволили дать простое и отвечающее действительности изображение наиболее распространенных случаев равновесия твердых тел. С другой стороны, при теоретическом истолковании физических явлений, если иметь в виду приложения, важно охватить все признаки явления в целом, сохраняя, насколько возможно, более простые и более естественные схемы и избегая анализа тех частных признаков, которые не имеют непосредственного практического интереса.

Поэтому оказывается удобным оставить без изменения предположение „а" и изменить предположение „б", которое имеет целиком эмпирическое происхождение, допуская, что в каждой опоре, наряду с обычной силой, предусматриваемой законом Кулона, возникает пара с незначительным моментом, как это должно было бы происходить в действительном случае, когда тело вместо одной геометрической точки P опиралось бы на малую площадку, окружающую P. Тогда реакции, происходящие от точек площадки, вообще говоря, сводились бы не к одной силе, приложенной в P, а к силе и паре с малым моментом (при заданных малых размерах площадки). Для определения этой добавочной пары мы будем иметь в виду указанный выше случай цилиндра и будем искать, как, исходя из этого примера, получить более общий критерий, приложимый ко всем случаям начинающегося качения.

26. В случае цилиндра, подвергающегося действию горизонтальной силы τ, мы сейчас же увидим, что согласие между теорией и физической действительностью восстанавливается, если допустим, что помимо реакций (заключенных в соответствующих конусах трения и т. д.) точек прямой g возникает пара сопротивления с осью g; момент этой пары может достигнуть определенной величины Γ_0, но не может ее превзойти. Пока $R\tau \leqslant \Gamma_0$, равновесие продолжает существовать; но как только момент силы τ относительно образующей g цилиндра превзойдет значение Γ_0, цилиндр начнет катиться по полу. То же самое будет происходить и при действии какой угодно другой силы, смотря по тому, будет или не будет превосходить величину Γ_0 момент этой силы относительно прямой g. Так, например, если добавочная сила представляет собой вес, равный весу цилиндра и имеющий относительно g плечо b (расстояние от g линии действия веса), то условие равновесия принимает вид

$$bp \leqslant \Gamma_0.$$

Реактивной паре, которая может уравновесить внешнюю силу с моментом относительно g, не превосходящим Γ_0, дают название *пары трения качения*, а Γ_0 называется *предельным моментом* трения качения. Как мы видим, отношение Γ_0/R измеряет так называемую *предельную силу тяги*, т. е. наибольшую горизонтальную силу, перпендикулярную к оси, которая, будучи приложена к центру тяжести, не нарушит его равновесия.

Далее, согласно закону Кулона, который первым произвел опыты также и над явлениями этого рода, предельную силу тяги для данного материала обеих соприкасающихся поверхностей надо считать *прямо пропорциональной весу цилиндра и обратно пропорциональной радиусу R.*

В обычных случаях, когда радиус R равен нескольким дециметрам (и в еще большей степени, если речь идет о бо́льших радиусах), предельная сила тяги всегда будет очень мала по сравнению с предельной силой тяги, относящейся к трению скольжения (гл. IX, п. 2). Так, например, чтобы вызвать качение полированного металлического цилиндра, с радиусом в 50 *см*, по деревянному или металлическому столу, тоже полированному, достаточно будет (на высоте оси) приложить силу, которая была бы приближенно равна *одной тысячной* веса цилиндра. Коэффициент трения скольжения между аналогичными материалами приближенно равен $^1/_5$; предельная сила тяги была бы равна $^1/_5$ веса тела, т. е. в 200 *раз больше,* чем предельная сила тяги при качении.

27. Так как предельная сила тяги Γ_0/R, по крайней мере приближенно, прямо пропорциональна весу p цилиндра и обратно пропорциональна соответствующему радиусу R, то с тем же самым приближением можно считать, что момент пары трения качения пропорционален весу цилиндра, т. е.

$$\Gamma_0 = hp,$$

где множитель пропорциональности h зависит от материальной природы поверхностей соприкосновения, а не от радиуса R.

Если, как и в предыдущем пункте, мы предположим, что добавочная сила представляет собой вес, равный весу цилиндра и имеющий относительно прямой g плечо b, то условие равновесия выразится соотношениями

$$bp \leqslant hp \quad \text{или же} \quad b \leqslant h;$$

поэтому множитель h можно истолковать как наибольшее плечо рычага (относительно g), к концу которого можно приложить вертикальную силу, равную весу цилиндра, не нарушая его равновесия.

Множитель h обыкновенно называют *коэффициентом* или *параметром трения качения*; в отличие от коэффициента f трения скольжения он представляет собой не отвлеченное число, а некоторую длину (так как выражается отношением момента силы к самой силе). Поэтому, если дается его численное значение, необходимо указать еще единицы, в которых он выражен; естественно, удобно принять ту же самую единицу, к которой отнесен радиус R.

В указанном в предыдущем пункте случае, где

$$\Gamma_0 = (1/1000)\, Rp \quad \text{и} \quad R = 50 \text{ см}, \quad \text{имеем} \quad h = R/1000 = 0{,}05 \text{ см}.$$

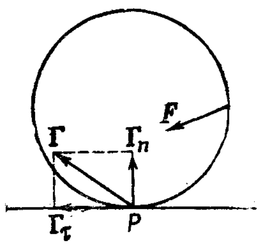
Для колес экипажа на обыкновенной дороге имеем значения h, заключенные между 10 и 75 *мм* в зависимости от типа и состояния, в котором содержится дорога. На замощенных дорогах он изменяется от 10 до 40 *мм*, если они сильно загрязнены и испорчены; на незамощенных дорогах от 20 до 50 *мм* и даже больше (до 75 *мм*), если они покрыты гравием.

28. Параметр h зависит от материальной природы поверхностей соприкосновения и, наоборот, не зависит от длины R, которая входит, как это было в рассмотренном примере, при определении геометрического вида тела, если оставаться в области экспериментальных фактов, из которых мы вывели правило.

С другой стороны, h является длиной, которая (подобно, например, среднему молекулярному расстоянию) зависит исключительно от структуры тела (или, лучше сказать, от структуры двух соприкасающихся тел), а не от геометрической формы. Грубо интуитивным путем эту длину h можно сопоставить с шероховатостью двух поверхностей, от которых зависит взаимное трение.

Это заключение не может, конечно, служить удовлетворительной основой для построения окончательной теории трения качения. Однако установленные выше принципы достаточно хорошо соответствуют наблюдаемым фактам и приводят к формулировке общих законов, относящихся к трению качения, достаточных для нужд техники.

29. В случае цилиндра мы обнаружили, что плоскость опоры обладает свойством противодействовать внешним силам не только силами, приложенными в точках соприкосновения (обычные реакции трения скольжения), но также (в известных пределах) и парами. Это наводит на мысль, что аналогичные явления будут иметь место также и в случае однородного тяжелого шара, тоже опирающегося на горизонтальный пол.



Фиг. 39.

Например, если к произвольной точке поверхности шара мы приложим горизонтальную силу, направленную как угодно, но достаточно малую, то равновесие будет еще сохранено; то же самое будет происходить и в более общем случае действия какой угодно силы $\boldsymbol{F}$ (фиг. 39), не превосходящей определенной величины. Это значит, что в точке опоры P возникает не только сила (реакция), но также и пара (реактивная) с моментом $\mathbf{\Gamma}$ (реактивный момент), который может уравновесить момент относительно точки P (вообще говоря, отличный от нуля) внешней силы. Для определения момента $\mathbf{\Gamma}$ удобно рассмотреть две его составляющие: тангенциальную $\mathbf{\Gamma}_\tau$ и нормальную $\mathbf{\Gamma}_n$, соответственно называемые *моментом трения качения* (или трения второго рода) и *моментом трения верчения* (или трения третьего рода).

Для оправдания таких наименований достаточно обратить внимание на то, что̀ происходит в частных случаях, в которых момент $\mathbf{\Gamma}$ является чисто касательным или чисто нормальным.

Предположим сначала, что на шар действует только одна сила $\boldsymbol{F}$, лежащая в вертикальной плоскости π, которая проходит через точку опоры P. Момент силы $\boldsymbol{F}$ относительно точки P перпендикулярен к плоскости π и, следовательно, является чисто касательным к шару. При равновесии реактивный момент должен быть прямо противоположным моменту силы $\boldsymbol{F}$ и потому будет тоже касательным к шару. Как только величина силы превзойдет известный предел, мы увидим, что шар начнет катиться, причем мгновенная ось вращения будет совпадать с касательной в точке P к шару, т. е. с линией действия реактивного момента. Таким образом, в рассматриваемом нами случае равновесия мы приходим к заключению, что реактивный момент препятствует качению шара в направлении, перпендикулярном к линии его действия; отсюда и происходит название *момент трения качения*.

Предположим теперь, что шар подвергается действию двух равных и противоположных сил, расположенных в одной и той же горизонтальной плоскости. Момент этой пары сил относительно точки опоры P будет вертикальным; поэтому вертикальным будет и реактивный момент, уравновешивающий момент активной пары. Увеличивая этот последний, мы увидим, что шар начнет вращаться вокруг вертикали, проходящей через точку P и представляющей собой линию действия реактивного момента. Это заставляет с полным основанием предположить, что в статических условиях этот момент препятствует телу вертеться, как если бы оно было зажато в подшипниках, расположенных вокруг нормали к плоскости опоры в точке соприкосновения. Поэтому реактивный момент, нормальный к плоскости опоры, и называется моментом *трения верчения*.

30. Как и в случае цилиндра, можно считать, что момент трения качения $\mathbf{\Gamma}_\tau$ пропорционален весу и множитель пропорциональности (имеющий размерность длины) не зависит в заметной степени от радиуса шара; то же самое относится и к моменту трения верчения $\mathbf{\Gamma}_n$. Соответствующие множители пропорциональности, которые мы будем обозначать через h_1 и h_2, вообще говоря, различны между собой, а именно: $h_2 < h_1$. Например, для металлического шара с диаметром в 1 *м*, опирающегося на твердый пол, приближенно имеем $h_2 = 0{,}07$ *мм*, тогда как h_1 сохраняет тот порядок величины, который указан в п. 27 для качения цилиндра ($h_1 = 0{,}5$ *мм*, т. е. приблизительно в семь раз больше, чем h_2).

Заметим, наконец, что множитель h_1 допускает истолкование, подобное тому, которое в случае цилиндра (п. 27) было дано для множителя h трения качения; т. е. h_1 есть наибольшее плечо относительно точки P, к концу которого, не нарушая равновесия, можно приложить добавочную вертикальную силу P, равную весу шара. Аналогично h_2 есть наибольшее плечо, которое можно дать, не нарушая равновесия, горизонтальной паре, состоящей из двух сил, равных по величине весу шара.

31. Изложенные до сих пор опытные результаты подсказывают выводы и обобщения, подобные тем, которые были признаны достоверными в случае трения скольжения. Мы будем предполагать следующее:

1. *Если на шар помимо веса* (или вместо веса) *действуют другие какие угодно силы, то остаются в силе те же самые законы, в предположении, что вместо веса подставлена величина нормального давления, производимого шаром на плоскость опоры, или* (что одно и то же) *величина N нормальной реакции со стороны плоскости.*

При этом подразумевается, что давление направлено в сторону опоры (и, следовательно, реакция направлена наружу), так как иначе не возникнут ни сила трения, ни момент трения.

2. *Если, в более общем случае, вместо шара, соприкасающегося с плоскостью, речь идет о каком угодно теле S, которое касается в какой-нибудь точке P материальной поверхности σ, то момент трения связан с нормальной реакцией N соотношениями того же самого вида, как и в случае шара и плоскости.*

Таким образом, в заключение, как синтез непосредственных опытных данных и последующих выводов, можно высказать следующий *общий закон трения качения.*

Если твердое тело опирается в одной или в нескольких точках на другие тела, то каждая опора P способна противодействовать (обеспечивая равновесие) не только одной силой $\mathbf{\Phi}$, *содержащейся во (внешней) полости конуса трения, но еще и моментом* $\mathbf{\Gamma}$, *который, вообще говоря, может иметь какое угодно направление, но по величине не может превзойти некоторого предела, зависящего от внешней силы и от материальной природы двух соприкасающихся поверхностей.*

Если мы обозначим через N абсолютное значение составляющей реактивной силы $\mathbf{\Phi}$ по нормали n к поверхности опоры в точке P, через Γ_τ и Γ_n абсолютные значения касательной (момент трения качения) и нормальной (момент трения верчения) составляющих момента $\mathbf{\Gamma}$, то будем иметь

$$\Gamma_\tau \leqslant h_1 N, \quad \Gamma_n \leqslant h_2 N,$$

где коэффициенты h_1 и h_2 в заметной степени не зависят от внешней силы (и, следовательно, от N), а также и от геометрической формы поверхности соприкосновения.

32. По отношению к трению качения нет необходимости останавливаться на соображениях, приведенных в п. 13 по поводу трения скольжения и заключающихся в том, что если мы при расчетах отвлекаемся от трения, то это дает лишь бо́льшую гарантию равновесия. В самом деле, при этом приходится пренебрегать такими действиями, которые могут только способствовать равновесию и были бы в состоянии обеспечить его также в том случае, когда действующая сила, не удовлетворяя в точности условиям равновесия при отсутствии трения, достаточно мало отличалась бы от значения, требуемого этими условиями.

Во многих практически интересных случаях равновесия можно пренебрегать как трением скольжения, так и трениями качения и верчения (см. § 4). В других случаях (п. 18) существенное влияние оказывает только трение скольжения, трениями же качения и верчения можно пренебречь, так как эффект их весьма мал по сравнению с эффектом трения скольжения.

Наконец, бывают также случаи, тоже важные для приложений, когда необходимо принимать во внимание трение качения и трение верчения (или одно их них), чтобы увидеть наиболее существенные черты реального явления. Высказанное общее правило как раз и позволяет поставить и исследовать такие вопросы.

§ 7. Возникающее движение паровоза. Наибольшая сила тяги

33. В качестве заключительного приложения законов трения рассмотрим паровоз веса $\boldsymbol{P}$, установленный на n парах колес, который должен тянуть поезд. Представим себе, что паровоз находится в таком состоянии готовности к движению, какое требуется при нормальной его работе, когда движение его колес представляет собой чистое качение без скольжения.

Силы, действующие на паровоз, находятся в состоянии *предельного* равновесия *относительно качения,* так что всякая опора оказывает наибольшее сопротивление качению, на которое она способна, т. е. момент реактивной пары имеет для каждой опоры наибольшее возможное для него значение. В то же время, так как мы исключаем возможность скольжения, реакции трения скольжения не будут наибольшими из возможных. Силы, действующие на паровоз, должны удовлетворять основным уравнениям равновесия. Для вывода, который мы имеем в виду, достаточно приравнять нулю результирующую всех *внешних сил,* которые (если пренебречь сопротивлением воздуха) сводятся к следующим:

1) вес $\boldsymbol{P}$ паровоза;

2) $2n$ реакций рельсов;

3) реакция состава, равная и противоположная силе тяги $\boldsymbol{T}$, приложенной к составу и стремящейся сдвинуть состав, преодолевая трение качения (колес о рельсы).

Если предположим, что путь горизонтален, то вертикальные силы сведутся к весу $\boldsymbol{P}$ и нормальным реакциям $\boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_2, \ldots, \boldsymbol{N}_{2n}$ отдельных опор (обязательно направленным вверх), поэтому мы должны прежде всего иметь

$$\sum_{i=1}^{2n} N_i = \boldsymbol{P}; \tag{8}$$

можно предположить, что вес равномерно распределен между $2n$ опорами.