Предыдущее неравенство делает понятной причину продолжающегося увеличения веса современных паровозов. Не достаточно увеличить мощность; для того чтобы такое увеличение оказалось полезным, необходим соответствующий вес.

34. Это тем более необходимо, когда речь идет о движении на подъемах.

Если α есть угол наклона к горизонту, то нормальная реакция рельсов будет равна в этом случае $P\cos\alpha$. Наоборот, сила тяги на подъеме будет больше: вместо ее значения T, которое мы при прочих равных условиях имели бы на горизонтальном пути, мы должны подставить теперь сумму $T+q\sin\alpha$, где через q обозначен полный вес всего поезда, включая и локомотив.

Эти результаты можно получить тем же способом, который был указан в предыдущих пунктах: достаточно спроектировать первое основное условие равновесия (результирующая равна нулю) на нормаль к плоскости дороги и на самую плоскость, имея при этом в виду, что нормаль и плоскость не будут уже более соответственно вертикалью и горизонтальной плоскостью.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Теория простых машин. Проверить так называемое золотое правило механики: „что выигрывается в силе, то теряется в пути“, или, точнее, „если отвлечься от трения, то элементарная работа активных сил на всяком перемещении системы из положения равновесия равна нулю“. — Теория весов. См., например, Levy, Eléments de cinématique et de mécanique, Paris, 1902, XXII. Эти вопросы рассматриваются также и в тексте (гл. XVI, § 5) как приложение принципа виртуальных работ. Интересно поэтому показать, что те же самые результаты можно также установить более элементарным и прямым путем, обращаясь только к общим предпосылкам механики и статики твердого тела.

2. Показать, что если несколько сил, приложенных к твердому телу, уравновешиваются или, если рассматривать более общий случай, эквивалентны паре сил, то центр тяжести равных масс, расположенных в точках приложения сил, будет также и центром тяжести других масс, тоже равных между собой, но расположенных в свободных концах тех же самых сил.

3. На твердый тетраэдр действуют четыре силы, нормальные к его граням, пропорциональные площадям граней и направленные все или внутрь, или наружу тетраэдра. Показать, что равновесие будет существовать, если точка приложения каждой из сил является центром тяжести перпендикулярной к ней грани или вершиной, противоположной такой грани (ср. упражнение 18 гл. I).

4. Распространить свойство, указанное в предыдущем упражнении, на какой угодно многогранник, а также, переходя к пределу, на твердое тело, ограниченное как плоскими, так и кривыми поверхностями. См. Bisconcini, Esercizi e complementi di meccanica razionale, Milano, 1927, стр. 254—256.

5. Твердый однородный стержень OA может вращаться в вертикальной плоскости вокруг точки O. В точке B стержня, находящейся на расстоянии b от O, подвешен груз q. Вес единицы длины стержня равен p. Стержень удерживается в равновесии в горизонтальном положении посредством направленной вверх вертикальной силы, приложенной в конце A. Какую длину $2l$ должен иметь стержень, чтобы эта сила оказалась наименьшей?

Ответ: $l=\sqrt{\dfrac{bq}{2p}}$, наименьшая величина силы есть $\sqrt{2bpq}$.

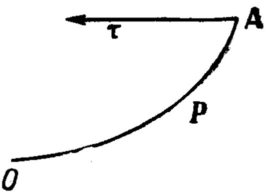
6. Однородный прямоугольник может вращаться вокруг одной из своих горизонтальных сторон; он находится в равновесии под действием ветра, отклоняясь на угол α от вертикали.

Предполагается, что ветер, дующий в горизонтальном направлении, действует на каждый элемент $d\sigma$ прямоугольника с некоторой горизонтальной силой, пропорциональной $d\sigma\cos\alpha$ (проекции элемента на плоскость, перпендикулярную к направлению ветра).

Обозначив через k коэффициент пропорциональности, через p вес прямоугольника, через σ его площадь, показать, что имеем

$$k\,\sigma\cos^2\alpha=p\sin\alpha.$$

7. Требуется повалить столб (вертикальный) AB, имея в распоряжении веревку, менее длинную, чем столб. Ее привязывают к столбу в точке C на высоте x от поверхности земли и располагают так, что ее конец D находится на высоте 1 *м*. Обозначив через l длину веревки (в метрах), найти значение x, при котором начальное усилие, необходимое для того, чтобы повалить столб, будет наименьшим. [Необходимо, чтобы прямая CD отстояла возможно далее от A.]

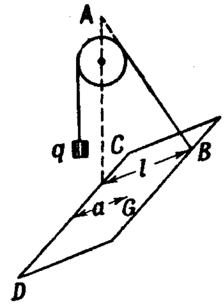


Фиг. 40.

8. Твердая однородная дуга OA (фиг. 40) расположена в вертикальной плоскости и может вращаться в этой плоскости вокруг точки O. В точке A действует (в той же вертикальной плоскости) горизонтальная сила τ, уравновешивающая вес дуги.

Каким должен быть профиль дуги, чтобы после удаления какой-нибудь ее части PA оставшаяся часть OP могла оставаться в равновесии, в предположении, что к точке P приложена та же самая горизонтальная сила τ?

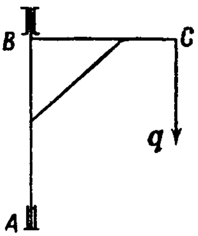
[Дуга OA должна представлять собой часть окружности радиуса τ/p (p равно весу единицы длины).]



Фиг. 41.

9. Крышка прикреплена к ящику цилиндрическим шарниром CD (фиг. 41) и удерживается под углом α к горизонтальной плоскости силой q, приложенной в точке B крышки и направленной к точке A, которая лежит на вертикали, пересекающей прямую CD и расположенной в вертикальной плоскости, проходящей через B и перпендикулярной к CD. На практике это осуществляется посредством веревки, привязанной к крышке в точке B, перекинутой через блок и несущей на другом конце груз весом q. Известны вес крышки p, расстояние a центра тяжести G крышки от стороны CD, аналогичное расстояние l точки B и высота h точки A над шарниром; определить угол наклона α. Предположив, что крышка находится в горизонтальном положении, опираясь на края ящика, определить наименьшее значение силы q, необходимое, чтобы поднять ее. $\left[\text{Найдем: } \sin\alpha = \frac{h^2+l^2}{2hl} - \frac{hlq^2}{2a^2p^2}\right.$; при $\alpha = 0$ крышку можно поднять при условии, что q превышает $\left. p\frac{a}{hb}\sqrt{h^2+l^2}.\right]$

10. Подъемный кран ABC (фиг. 42) может вращаться вокруг вертикальной оси AB; нижний конец A стойки крана поддерживается подпятником, в то время как верхний конец B, находящийся от A на расстоянии h, опирается о подшипник. Кран несет груз q, приложенный в C. Расстояния центра тяжести крана и точки приложения C груза от оси AB соответственно равны a и c.



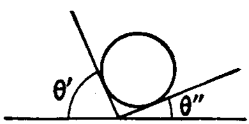
Фиг. 42.

Определить реакции в точках A и B, пренебрегая трением в подшипнике B. [Вертикальная составляющая (направленная вверх) реакции в точке A равна $p+q$; горизонтальные составляющие (равные и противоположные) реакций в точках A и B имеют величину, равную $(ap+bq)/h$.]

11. Горизонтальная балка на двух опорах A и B поддерживает груз q в промежуточной точке C, находящейся на расстоянии a от A. Во всем остальном имеется симметрия относительно плоскости, перпендикулярной к отрезку AB и проходящей через его середину. Расстояние между опорами равно b, вес балки равен p.

Определить давления на опоры (равные и противоположные нормальным реакциям этих опор).

12. Тяжелый однородный шар поддерживается двумя гладкими наклонными плоскостями (фиг. 43). Найти отношение между величинами реакций в двух точках соприкосновения в функциях от углов наклона θ', θ'' двух плоскостей.



Фиг. 43.

13. Балка опирается на два круглых цилиндра с горизонтальными осями, расположенными на разных уровнях. Кроме того, верхний конец балки удерживается веревкой, параллельной оси балки и привязанной к неподвижной опоре. Рассматривая среднюю вертикальную плоскость, можно свести задачу (при наличии симметрии относительно указанной средней плоскости) к случаю тяжелого твердого тонкого стержня, расположенного в вертикальной плоскости, закрепленного в точке A и опирающегося в точке B на окружность.

Известны вес p балки, расстояние l между точками опоры A (верхняя точка) и B (нижняя точка), разность их уровней h, расстояние a центра тяжести балки от A и угол наклона α балки к горизонтальной плоскости. Определить (графически и численно) реакцию опоры в точке B, предположив, что трения нет. Проверить, что если освободить верхний конец балки от веревки, то равновесие может существовать только при наличии трения и при условии, что угол трения в каждой опоре больше, чем угол наклона α балки. $\left[\text{Реакция в точке } B \text{ равна } \frac{a\sqrt{l^2-h^2}}{l^2}p.\right]$

14. Стержень AB опирается в точке A на вертикальную стену, в точке B — на горизонтальный пол. Он находится в равновесии в вертикальной плоскости под действием своего веса p. В точке B ему мешает скользить выступ в полу; все будет происходить так, как если бы конец B был закреплен.

Известны положения стержня и его центра тяжести; определить реакции в точках A и B, предположив, что в опоре A трения нет.

15. Однородный стержень AB длиной l опирается в точке C на цилиндр радиуса r с горизонтальной осью.

Стержень находится в равновесии в вертикальной плоскости под действием своего веса и натяжения привязанной к верхнему концу B стержня веревки, которая некоторой своей частью проходит по цилиндру и несет на нижнем конце груз веса q. Натяжение веревки по величине равно весу q и направлено по касательной BD к окружности нормального сечения цилиндра. Пренебрегая трением в точке опоры C, составить уравнение, определяющее угол наклона θ стержня к горизонтальной плоскости в функции от p, q и r.

16. Два стержня AC, BC, прикрепленные (посредством шарниров) концами A и B к неподвижным опорам и связанные между собой (тоже посредством шарнира) в точке C, нагружены весами (распределенными как угодно) и находятся в равновесии в вертикальной плоскости. Определить реакции (две для каждого стержня), принимая во внимание, что силы, с которыми действуют стержни друг на друга в точке C, равны между собой по величине и направлены в противоположные стороны.

17. Двойная лестница (стремянка) находится в равновесии, опираясь четырьмя своими концами на горизонтальную плоскость. Распределение нагрузки предполагается каким угодно, но симметричным относительно вертикальной плоскости, проходящей через середины ступенек лестницы. В таком случае можно, складывая симметричные силы, свести систему сил к силам, действующим в вертикальной плоскости симметрии. Пусть AB_1, AB_2 — следы на этой плоскости двух частей лестницы, C_1C_2 — соединяющая их цепь, расположенная в плоскости симметрии. Силы, действующие на каждую из частей лестницы, можно привести к четырем, а именно, для части AB_1: вес $\boldsymbol{p}_1$; сила $\boldsymbol{R}_1$, приложенная в B_1 (результирующая реакций двух опор); сила $\boldsymbol{F}$, приложенная в A и представляющая собой реакцию другой части лестницы; горизонтальное натяжение τ цепи, действующее в точке C_1; для AB_2: вес $\boldsymbol{p}_2$; сила $\boldsymbol{R}_2$, приложенная в B_2; две силы $-\boldsymbol{F}$ и $-\tau$, приложенные соответственно в A и C_2. (Что сила, приложенная в A и происходящая от соединения с первой частью, есть $-\boldsymbol{F}$, следует из принципа равенства действия и противодействия; убедиться в том, что сила, приложенная в C_2, есть $-\tau$, можно, комбинируя принцип равенства действия и противодействия с тем уже не раз использованным обстоятельством, что, в первом приближении, сила передается неизменной с одного конца натянутой цепи на другой.)

Пренебрегая трением в опорах, определить усилие τ, которому подвергается цепь.

Ответ:
$$\tau = \frac{1}{2b}\left\{(a-a_1)\,p_1 + (a-a_2)\,p_2\right\};$$

τ, p_1, p_2 имеют очевидное значение, $2a = B_1B_2$, b — высота точки A над цепью и a_1, a_2 — расстояния центров тяжести G_1, G_2 двух частей лестницы от вертикали, проходящей через точку A.

18. Тяжелый однородный полушар опирается на наклонную шероховатую плоскость, касаясь ее своей сферической поверхностью. Равновесие может существовать (даже если оставить в стороне трение качения), лишь бы угол α наклона плоскости не превосходил угла трения и, кроме того был таким, чтобы удовлетворялось неравенство $\sin\alpha \leqslant 3/8$. На какой параллели должна находиться точка соприкосновения при равновесии[1])?

19. Однородный стержень опирается на край (предполагаемый горизонтальным) и на точку внутренней поверхности чаши, имеющей форму полусферы. Обе опоры рассматриваются как опоры без трения, благодаря чем реакция края чаши, действующая на стержень (край чаши можно считать окружностью, а стержень — материальной прямой), должна быть нормальной к стержню.

Заметим прежде всего, что плоскость, определяемая стержнем и центром сферической поверхности, вертикальна и положение равновесия определится, если будет известен радиус r сферы и длина $2l$ стержня.

Проверить, что в предложенных условиях при равновесии должно удовлетворяться неравенство $l > r\sqrt{2/3}$ и что наклон стержня α будет определяться посредством своего косинуса, являющегося положительным корнем уравнения

$$4r\cos^2\alpha - l\cos\alpha - 2r = 0.$$

20. Тяжелый однородный треугольник, со сторонами a, b, c, опирается тремя своими вершинами на внутреннюю поверхность сферы радиуса r. Предполагается, что трение отсутствует.

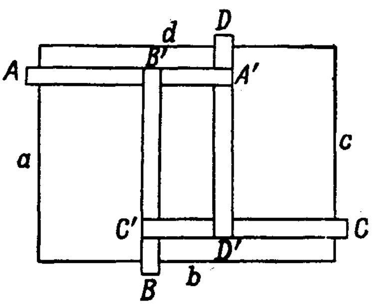
Показать, что в положении равновесия центр тяжести треугольника должен находиться на вертикали, проходящей через центр сферы, и отстоять от него на расстоянии, равном

$$\sqrt{r^2 - \frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2)}.$$

21. Циркуль с одинаковыми геометрически и материально ножками (однако не необходимо однородный) опирается в раздвинутом виде на цилиндр с горизонтальной осью.

Определить угол раскрытия 2φ циркуля в состоянии равновесия (которое возможно даже при отсутствии трения); циркуль рассматривается как два твердых стержня CA, CB, соединенных шарниром в C и опирающихся на окружность нормального сечения цилиндра так, что прямая, соединяющая точку C с центром, вертикальна.

Предполагается, что известен радиус r цилиндра и расстояние a центра тяжести каждой из ножек от C.



Фиг. 44.

22. Потолок Серлио. Четыре стены имеют сечение в виде не слишком удлиненного прямоугольника (именно такого, чтобы удвоенная меньшая сторона превосходила большую). Можно построить покрытие из четырех равных балок, длина которых меньше меньшей из сторон опорного прямоугольника, но превосходит половину большей стороны.

Устройство будет таким, как указано на фиг. 44. Балка AA' опирается на стену (представленную на схеме отрезком a) в точке A и на балку DD' в точке A' и служит опорой для балки BB'; балка BB' опирается на стену (представленную на схеме отрезком b) в точке B и на балку AA' в точке B' и служит опорой для балки CC' в точке C', и т. д.

[1]) Ср. Bisconcini, соч., цит. на стр. 83 гл. I, стр. 275—277.

Обозначим длину каждой балки через l, длины отрезков AB', CD' через $\lambda\ (<l)$ и длины отрезков BC', DA' через $\mu\ (<\lambda)$, так что длины сторон опорного прямоугольника будут равны $l+\lambda$, $l+\mu$.

Предположим, что балки нагружены (причем нагрузки на каждую балку могут быть и не равными друг другу), и обозначим момент относительно оси a[1]) нагрузки, действующей на балку AA', через M_1, момент относительно оси b нагрузки, действующей на балку BB', через M_2, момент относительно оси c нагрузки, действующей на балку CC', через M_3 и, наконец, момент относительно оси d нагрузки, действующей на балку DD', через M_4.

Далее вводятся четыре взаимные реакции (неизвестные), возникающие в точках A', B', C', D', которые следует считать (как это непосредственно очевидно) вертикальными. Если обозначим через R_1, R_2, R_3, R_4 соответственно их величины, в предположении, что равновесие возможно, то на балку AA' будет действовать (помимо прямо приложенных нагрузок и реакции стены в точке A) одна из сил R_2 (направленная вниз) в точке B' и одна из сил R_1 (направленная вверх) в точке A', и т. д. Выражая, что момент сил, действующих на балку AA' относительно прямой a, равен нулю, будем иметь

$$M_1+\lambda R_2-lR_1=0.$$

Остальные три уравнения будут иметь вид

$$M_2+\mu R_3-lR_2=0,$$
$$M_3+\lambda R_4-lR_3=0,$$
$$M_4+\mu R_1-lR_4=0.$$

В частном случае, когда $\mu=\lambda$ (потолок квадратной формы), только что написанные уравнения получаются из первого посредством круговой перестановки индексов 1, 2, 3, 4. В этом случае, положив для краткости

$$\frac{\lambda}{l}=k,$$

так что k будет меньше единицы, и

$$p_i=\frac{M_i}{l}\qquad (i=1,\ 2,\ 3,\ 4),$$

мы можем написать систему четырех уравнений в виде

$$R_1-kR_2=p_1,$$
$$R_2-kR_3=p_2,$$
$$R_3-kR_4=p_3,$$
$$R_4-kR_1=p_4.$$

Для того чтобы получить R_1, достаточно умножить эти уравнения последовательно соответственно на 1, k, k^2, k^3 и сложить их. Получится

$$R_1=\frac{p_1+p_2k+p_3k^2+p_4k^3}{1-k^4},$$

откуда, производя круговую перестановку индексов 1, 2, 3, 4, получим

$$R_2=\frac{p_2+p_3k+p_4k^2+p_1k^3}{1-k^4}\quad \text{и т. д.}$$

Неизвестные R оказываются, таким образом, положительными (так как положительны все M и, следовательно, все p).

[1]) Где направление оси a берется таким образом, чтобы момент нагрузки, приложенной к балке AA', был положительным.

Закончить решение, указав реакции опор, требуемые равновесием, и убедившись, что они действительно возможны (направлены вверх) и что все условия равновесия оказываются выполненными.

Рассмотреть общий случай, когда $\mu < \lambda$. (Ср. Bisconcini, соч., цит. на стр. 83 гл. I, стр. 287—290.)

23. Три ядра (равных и однородных) опираются на горизонтальную плоскость и касаются попарно друг друга. На них положено такое же четвертое ядро, касающееся всех трех.

Равновесие возможно только при условии, что коэффициент трения f между ядрами не будет меньше, чем $1/(\sqrt{2}+\sqrt{3}) = 0{,}318\ldots$, а коэффициент трения между ядрами и плоскостью (один и тот же для всех трех ядер) будет равен, по крайней мере, четвертой части указанной величины.

24. Металлическое кольцо (фрикционный хомут) имеет неизменно связанный с ним боковой выступ. Кольцо, насаженное на круглый стержень немного меньшего диаметра, находится в равновесии, упираясь в стержень в точках A и B, под действием нагрузки q, приложенной к концу C выступающей части.

Даны: диаметр d стержня, высота h точки A над точкой B, длина l выступающей части BC (предполагаемой горизонтальной), вес p кольца вместе с выступом, расстояние a точки B от линии действия веса и коэффициент трения f между стержнем и кольцом (одинаковый для точек A и B). Определить, при каких ограничениях возможно равновесие и каково наименьшее значение q, при котором оно может существовать.

Имея в виду, что вертикаль, проходящая через центр тяжести, пересекает хомут, так что $a<l$, и положив $b=\sqrt{d^2-h^2}$, $b_1=f(2a+h)$, $b_2=$ $=f(2l+h)$, показать, что для возможности равновесия необходимо, чтобы b было заключено между b_1 и b_2. Наименьшее значение q, способное обеспечить равновесие, есть $\dfrac{b-b_1}{b_2-b}p$.

25. Стержень AB, крепко зажатый между двумя вертикальными стенками, находится в равновесии в вертикальной плоскости, перпендикулярной к стенкам. Это предполагает, что стержень лежит внутри конусов трения, относящихся к точкам опоры A и B.

Известны: расстояние d между стенками; разность уровней h между концами A и B и вес p стержня; давление N (нормальная составляющая реакции), действующее в каждой из опор; коэффициент трения f между стержнем и стенками (одинаковый для обеих опор A и B).

Определить наибольшую силу q, действующую по вертикали вверх, которую можно приложить в некоторой точке C стержня, находящейся на расстоянии c от верхней опоры, не сдвигая его.

Ограничиваясь типичным случаем, в котором весом стержня можно пренебречь по сравнению с N, найдем

$$q = fN(1+\cos\alpha),$$

где угол α (заключенный между $-\pi/2$ и $\pi/2$) определяется посредством $\operatorname{tg}\alpha$ при помощи формул

$$\operatorname{tg}\alpha = \begin{cases} \dfrac{h-fc}{d-c} & \text{при} \quad c \leqslant \dfrac{1}{2}\left(d+\dfrac{h}{f}\right), \\[2ex] \dfrac{h+f(d-c)}{c} & \text{при} \quad c \geqslant \dfrac{1}{2}\left(d+\dfrac{h}{f}\right). \end{cases}$$

26. Тяжелое твердое тело опирается в $n\,(>3)$ точках P $(i=1,\ldots,n)$ на горизонтальный пол. Если мы примем поверхность пола за плоскость $z=0$, возьмем за начало координат проекцию центра тяжести тела на плоскость $z=0$ и обозначим через x_i, y_i координаты точек P_i, через Φ_i величину нормальной реакции в P_i, через p вес тела, то шесть основных условий равновесия сведутся к следующим трем:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \Phi_i &= p, \\ \sum_{i=1}^{n} x_i\Phi_i &= 0, \\ \sum_{i=1}^{n} y_i\Phi_i &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Мы знаем уже, что, в пределах статики неизменяемых тел, распределение реакций остается неопределенным (п. 16). Уравнения (1) выражают аналитически степень неопределенности, представляя собой только три соотношения между n неизвестными (положительными) Φ_i. Если все реакции Φ_i положительны, то (п. 14) вертикаль, проходящая через центр тяжести, должна пересекать опорную плоскость в точке, лежащей внутри опорного многоугольника.

Предположим, что это условие выполняется, и укажем критерий, позволяющий устранить неопределенность, если принять во внимание малые деформации пола, сохраняя условие, что тело является абсолютно твердым.

Предположим, что под действием нагрузки, каждая из опор P_i несколько оседает, так что после установления равновесия она не лежит уже в плоскости $z=0$, а находится от нее (в направлении вниз) на расстоянии некоторого малого количества z_i. Это количество z_i можно рассматривать как третью координату точки опоры, если условиться, что за положительное направление оси z мы будем считать направление, обращенное вниз.

После этого нет ничего более естественного, как допустить, что координата z_i пропорциональна той части полной нагрузки P, которая должна приходиться на опору P_i, т. е. (на основании принципа равенства действия и противодействия) пропорциональна Φ_i. Обозначив через $1/k_i$ (положительный) коэффициент пропорциональности (если свойства опорной плоскости одинаковы во всех точках опоры, то k_i будет иметь численное значение k, не зависящее от индекса i), можно написать

$$z_i = \frac{1}{k_i}\Phi_i.$$

Если допустить, кроме того, что оседание опор не связано ни с какой деформацией стоящего над ними тела, то n точек опоры, лежащие в плоскости $z=0$ в случае абсолютно твердой опорной плоскости, будут находиться в одной и той же плоскости и в рассматриваемом нами случае. Эта плоскость будет очень близка к плоскости $z=0$ (находясь несколько ниже ее), если предположить, что вертикальные перемещения отдельных точек опоры $z_i=\Phi_i/k_i$ очень малы.

Возьмем уравнение плоскости в виде

$$z=\lambda x+\mu y+\nu$$

(где коэффициенты λ, μ, ν заранее не определены) и выразим то обстоятельство, что оно удовлетворяется координатами x_i, y_i, z_i любой точки P_i; тогда будем иметь

$$\Phi_i = k_i(\lambda x_i+\mu y_i+\nu) \qquad (i=1,2,\ldots,n). \tag{2}$$

Таким образом, комбинируя предположения, что каждая опора оседает пропорционально приходящейся на нее нагрузке и что деформация опертого тела равна нулю (или ничтожна по сравнению с деформацией опорной плоскости), мы достигнем того, что выразим все реакции Φ_i посредством только трех вспомогательных неизвестных λ, μ, ν.

При этих условиях исчезает всякая неопределенность: достаточно обратиться к трем статическим уравнениям (1) и подставить в них, вместо Φ_i, выражения (2), чтобы получить из них значения λ, μ, ν. Внося затем эти значения в равенства (2), мы получим окончательные значения реакций.

Выполнить вычисления, написав при этом дополнительные условия, которые требуются для того, чтобы значения, получающиеся для Φ_i, были все положительными.

Рассмотреть случай четырех опор, совпадающих с вершинами прямоугольника, предполагая все коэффициенты осадки равными между собой ($k_i = k$).

27. Прямолинейная плотина с трапецоидальным сечением $ABCD$ высотой h и шириной d по верхнему гребню имеет вертикальную стенку (со следом AB в плоскости сечения) и откос (со следом DC), наклоненный к вертикали под углом α, так что длина основания сечения равна

$$d + h \operatorname{tg} \alpha.$$

Предположив плотину однородной, с весом p на единицу объема, определить моменты Γ_b, Γ_c (на единицу длины) относительно следов b и c вертикальной стенки и откоса.

Проверить, что момент устойчивости есть Γ_b и что он увеличивается при равных сечении и высоте вместе с углом наклона α откоса. Наименьшая величина Γ_b будет соответствовать, таким образом, прямоугольному сечению $AHKB\left(AH = BK = d + \frac{1}{2} h \operatorname{tg} \alpha\right)$.

28. Дымовая труба высоты h имеет цилиндрическую полость радиуса r и постоянной толщины s. Вес единицы объема есть p. Труба подвергается действию ветра.

Полное действие ветра при наибольшей его силе можно заменить горизонтальной силой τ, линия действия которой пересекает ось трубы на расстоянии, равном $^3/_5$ высоты от поверхности земли.

Определить коэффициент устойчивости.

29. Однородный тяжелый цилиндр радиусом r, параметр трения качения которого есть h, опирается на наклонную плоскость; образующая соприкосновения нормальна к линии наибольшего наклона. Каков наибольший угол наклона α, при котором цилиндр останется в равновесии? [$\operatorname{tg} \alpha = h/r$.]

30. Однородный тяжелый шар опирается на горизонтальную плоскость. Коэффициент трения скольжения $f = {}^1/_5$; параметр трения качения $h_1 = 0{,}5$ *мм*.

Требуется сдвинуть шар, прикладывая к нему на высоте δ от плоскости опоры горизонтальную силу наименьшей возможной величины.

Показать, что шар из положения равновесия начнет катиться или скользить, в зависимости от того, будет ли высота δ больше или меньше 2,5 *мм*.

31. Определить верхний предел силы тяги локомотива на подъеме в $25^0/_{00}$ при коэффициенте сцепления, равном $^1/_8$ (ср. п. 34). (При весе локомотива в 100 *т* и весе поезда в 300 *т* наибольшая сила тяги будет равна 2,5 *т*.)

32. Материальная точка (подвижная) P притягивается другими точками (закрепленными) P_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) прямо пропорционально массе соответствующей притягивающей точки и расстоянию PP_i. Показать, что центр тяжести G точек P_i является положением устойчивого равновесия точки P (ср. гл. X, п. 14)

33. Две прямолинейные направляющие, расположенные в вертикальной плоскости по разные стороны от вертикали, проходящей через точку их пересечения, наклонены к этой вертикали под углами α и α'.

Тяжелый однородный твердый стержень может скользить своими концами по этим направляющим без трения. Показать, что положение равновесия является неустойчивым.

34. Однородный горизонтальный стержень поддерживает на своих концах, посредством двух равной длины нитей, два равных шара одного и того же веса. Стержень может вращаться в вертикальной плоскости вокруг конца C маленького штифта ничтожного веса, прикрепленного перпендикулярно к стержню в средней его точке. Показать, что в таких условиях равновесие будет неустойчивым. Показать, кроме того, что, наоборот, равновесие было бы устойчивым, если бы нити были заменены двумя такими твердыми стержнями, жестко связанными с горизонтальным стержнем, чтобы (в положении равновесия) центр тяжести G всей неизменяемой системы (составленной из трех стержней и двух шаров) находился ниже C.

35. Два тяжелых однородных шара находятся в равновесии внутри сферической оболочки в соприкосновении (без трения) между собой и с оболочкой. Показать, что равновесие системы является устойчивым. (В этом можно убедиться, заметив, что в положении равновесия центр тяжести двух шаров совпадает с самой нижней точкой сферической поверхности, представляющей собой геометрическое место всех его возможных положений.)

36. Неоднородный тяжелый цилиндр находится в равновесии, опираясь на наклонную шероховатую плоскость вдоль образующей, перпендикулярной к линии наибольшего наклона этой плоскости. Угол наклона плоскости меньше угла трения (скольжения), так что возможность скольжения исключена.

Рассмотреть вопрос об устойчивости равновесия по отношению к качению, пренебрегая трением качения.

37. Введение в астатику. Равновесие твердого тела, находящегося под действием заданной системы сил $(P_i, \boldsymbol{F}_i)$, где P_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$ — точки твердого тела, к которым приложены силы, называется *астатическим*, если оно продолжает существовать, как бы ни изменялось положение твердого тела, лишь бы оставались (векторно) неизменными отдельные силы $\boldsymbol{F}_i$ (несмотря на изменение положения в пространстве соответствующих точек приложения, неизменно связанных между собой).

Прежде всего очевидно, что поступательное перемещение твердого тела не оказывает никакого влияния на условия равновесия. Поэтому достаточно рассмотреть изменение ориентации тела и можно даже ограничиться рассмотрением только бесконечно малого вращения его вокруг произвольной оси, потому что всякое изменение ориентации, даже конечное, можно представить себе как результат последовательных элементарных вращений. Если определены условия, обеспечивающие сохранение равновесия при элементарном вращении, то эти условия будут необходимыми и достаточными для астатического равновесия.

Заметим, далее, что из двух основных условий $\boldsymbol{R} = 0$, $\boldsymbol{M} = 0$, необходимых и достаточных для равновесия твердого тела, первое очевидно остается справедливым (при допущенных предположениях о силах), как бы ни изменялась ориентация твердого тела. Остается определить, будет ли удовлетворяться второе основное уравнение при элементарном вращении тела.

Рассмотрим бесконечно малое вращение ε неизменяемой системы вокруг оси, проходящей через точку O и имеющей единичный вектор $\boldsymbol{u}$. Перемещение любой точки P_i выразится при этом в виде

$$\delta P_i = \delta\overrightarrow{OP_i} = \varepsilon\boldsymbol{u}\times\overrightarrow{OP_i} \qquad (i=1, \ldots, N).$$

Изменение, которое испытывает результирующий момент $\boldsymbol{M}$ сил $\boldsymbol{F}_i$ относительно полюса O в результате этого элементарного вращения, определится равенством

$$\delta\boldsymbol{M} = \varepsilon\sum_{i=1}^{N}\left\{\boldsymbol{u}\times\overrightarrow{OP_i}\right\}\times\boldsymbol{F}_i = \varepsilon\sum_{i=1}^{N}\left(\boldsymbol{F}_i\cdot\boldsymbol{u}\right)\overrightarrow{OP_i} - \varepsilon V\boldsymbol{u}, \tag{3}$$

где V обозначает *вириал* системы сил относительно полюса O (гл. I, упражнение 10). Для того чтобы равновесие было астатическим, необходимо и достаточно, чтобы было $\delta\boldsymbol{M}=0$, каково бы ни было $\boldsymbol{u}$ (и ε). В равенстве $\delta\boldsymbol{M}=0$, где $\delta\boldsymbol{M}$ выражено равенством (3), подставим вместо $\boldsymbol{u}$ последовательно три взаимно перпендикулярных единичных вектора, например три единичных вектора $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ осей, и, по умножении (скалярном) полученных таким образом уравнений соответственно на $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, сложим их почленно. Таким образом придем к соотношению $\varepsilon(V-3V)=0$, т. е. к равенству $V=0$; после этого легко проверить, что *условие астатического* равновесия выражается соотношением

$$\sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{F}_i\cdot\boldsymbol{u})(\overrightarrow{OP_i}\cdot\boldsymbol{v}) = 0$$

при любом выборе двух произвольных единичных векторов $\boldsymbol{u}$ *и* $\boldsymbol{v}$.

Это векторное условие равносильно девяти скалярным уравнениям, из которых первыми тремя, относящимися к проекциям X_i сил, будут

$$\sum_{i=1}^{N}X_ix_i=0, \qquad \sum_{i=1}^{N}X_iy_i=0, \qquad \sum_{i=1}^{N}X_iz_i=0;$$

шесть аналогичных уравнений будут иметь место по отношению к проекциям Y_i и Z_i.

Систематическое изложение исследований этого рода можно найти в книге: M. Bottasso, Astatique, Павия, 1915.