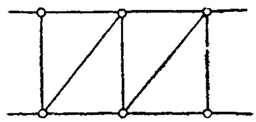
Глава XIV

СТАТИКА СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ, НИТЕЙ И ТОНКИХ СТЕРЖНЕЙ

§ 1. Стержневые системы. Усилия. Узловые нагрузки

1. *Стержневой системой* называют всякую систему, состоящую из твердых прямолинейных стержней, соединенных между собой на концах посредством шарниров (сферических). Шарниры, соединяющие стержни системы, называются *узлами* системы. Важный тип стержневых систем представляют собой так называемые *решетчатые балки,* или *фермы,* структура которых может быть чрезвычайно разнообразной; наиболее простым примером является схематически представленный на прилагаемой фигуре (фиг. 45). Не нарушая общности, мы можем ограничиться рассмотрением *связных* стержневых систем, т. е. мы можем не рассматривать системы, составленные из двух или более отдельных систем, не соединенных между собой. Если геометрическая конфигурация системы представляет собой ломаную линию со свободными концами, так что нельзя удалить никакой промежуточный стержень, не лишив систему связности, то система называется *односвязной.* Наоборот, система называется *многосвязной,* если возможно, по крайней мере одним способом, удалить один стержень (связанный в своих концах с другими стержнями) без того, чтобы оставшаяся система потеряла связность; такой, в частности, будет всякая система, конфигурация которой представляет собой замкнутый многоугольник (плоский или пространственный).



Фиг. 45.

2. Мы будем изучать условия равновесия стержневых систем. Что касается отыскания достаточных условий, то, очевидно, здесь нельзя ограничиться основными уравнениями, так как, вообще говоря, речь идет не о неизменяемых системах, а о системах деформируемых, состоящих из связанных между собой неизменяемых частей (стержней и шарниров). Но подобно тому, как равновесие какой угодно материальной системы обязательно будет иметь место, если всякая ее отдельная материальная точка (или элемент) находится в равновесии под действием всех сил (внешних и внутренних), которые на нее действуют, так и в случае стержневой системы мы обязательно будем иметь равновесие, если каждая отдельная ее часть (т. е. каждый стержень и каждый шарнир) сама по себе будет в равновесии под действием внешних сил и реакций, действующих на нее в местах соединения с другими частями системы.

Основываясь на самом определении стержневой системы, можно внести значительное упрощение: отдельные шарниры можно считать материальными точками, так что в конце концов всякую стержневую систему можно рассматривать просто как систему твердых стержней и материальных точек или *узлов*. Чтобы охарактеризовать роль шарниров, мы будем считать, что каждый стержень связан в каждом из своих концов с соответствующим узлом, а не непосредственно с другими стержнями, которые сходятся в этом узле. При схематическом изображении узла нужно представлять себе, что в каждом узле, в котором сходятся n стержней, имеется $n+1$ материальных элементов: сам узел и n концов сходящихся в нем стержней, причем последние нужно считать связанными с узлом, а не непосредственно между собой.

Из всего этого следует, что для равновесия стержневой системы необходимы и достаточны два класса условий:

а) условия, выражающие, что каждый стержень AB находится в равновесии под действием системы прямо приложенных к нему сил и двух реакций $\mathbf{\Phi}_A$ и $\mathbf{\Phi}_B$, происходящих от соединения с двумя узлами A и B: эти две реакции называются *усилиями*, действующими со стороны узлов на стержень;

б) условия, выражающие, что для всякого узла A результирующая прямо приложенных к нему сил и реакций $\mathbf{\Psi}_{BA}$, $\mathbf{\Psi}_{CA}, \ldots$, которые этот узел испытывает со стороны различных стержней BA, $CA, \ldots$, сходящихся в нем, равна нулю. Естественно, что для усилия $\mathbf{\Phi}_A$, которое любой стержень AB испытывает со стороны узла A, и реакции $\mathbf{\Psi}_{BA}$, с которой сам стержень действует на узел (силы, внутренние для системы), остается в силе принцип равенства действия и противодействия, так что будем иметь

$$\mathbf{\Psi}_{BA} = -\mathbf{\Phi}_A.$$

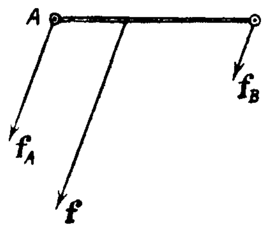
3. Между возможными системами внешних сил, действующих на стержневую систему, интересны, в частности, те, в которых активные силы приложены исключительно к узлам.

В этих случаях каждый отдельно взятый стержень AB системы подвергается исключительно действию двух сил $\mathbf{\Phi}_A$ и $\mathbf{\Phi}_B$, приложенных к его концам A и B и представляющих собой усилия, действующие со стороны узлов A и B, и условия равновесия „а" просто выражают, что для всякого стержня оба усилия (гл. VIII, п. 3) должны быть прямо противоположными. Если оба усилия направлены внутрь стержня, то они называются *сжимающими* и стержень, который при этом сопротивляется сжатию, называется *сжатым*; наоборот, если оба усилия направлены наружу, они называются *растягивающими* и стержень, который в этом случае сопротивляется растягиванию, называется *растянутым*.

4. Важность рассмотрения чисто *узловых сил* зависит от двух причин. Прежде всего во многих конкретных приложениях систему сил можно считать чисто узловой, хотя и не в абсолютном смысле, так как каждый стержень, конечно, испытывает действие силы тяжести, но, по крайней мере, приближенно, поскольку собственный вес каждого из стержней часто оказывается ничтожным по сравнению с силами, прямо приложенными к узлам.

С другой стороны, как мы здесь докажем, имеет место следующая важная теорема.

Для всякой системы сил Σ, *действующей на стержневую систему, можно определить чисто узловую систему сил* Σ^*, *статически эквивалентную данной*, т. е. такую, что условия равновесия стержневой системы при действии на нее системы сил Σ^* не будут отличаться от условий, которые мы имели бы для той же системы при заданной системе сил Σ.



Фиг. 46.

Покажем прежде всего, что систему сил Σ всегда можно заменить такой статически эквивалентной ей системой сил, в которой помимо возможных сил, приложенных к узлам, на стержни системы могут действовать лишь силы, приложенные к их концам. Для этой цели рассмотрим любой стержень AB стержневой системы; пусть f будет какая угодно из сил системы Σ, действующих на этот стержень. Так как стержень представляет собой твердое тело, то, не нарушая возможного равновесия (гл. XIII, п. 2), мы можем заменить силу f любой векторно эквивалентной ей системой сил (лишь бы речь шла о силах, приложенных к точкам стержня); в частности, можно заменить силу f (фиг. 46) двумя силами f_A и f_B, параллельными f, направленными в одну и ту же сторону и приложенными соответственно к концам A, B стержня (но не к соответствующим узлам). Поступая аналогично со всеми силами из Σ, прямо приложенными к стержню AB, сложим все полученные таким образом силы f_A и соответственно все силы f_B. В результате получим две силы R_A и R_B, приложенные к концам A и B стержня; обозначим через R'_A, $R''_A, \ldots$ результирующие, аналогичные R_A, которые получатся для других стержней, сходящихся в узле A, и будут приложены к соответствующим концам этих стержней. Наконец, обозначим, как и в предыдущем пункте, через Φ_A, Φ_B усилия, которые стержень AB испытывает со стороны узлов A и B, через F_B силу, прямо приложенную к узлу A, и через $\boldsymbol{\Psi}$, $\boldsymbol{\Psi}'$, $\boldsymbol{\Psi}''$, ... силы, которые испытывает этот узел со стороны различных связанных с ним стержней; припоминая (п. 2), что $\boldsymbol{\Psi}$ есть реакция стержня AB, имеем

$$\boldsymbol{\Psi} = -\boldsymbol{\Phi}_A.$$

Таким образом, после указанных приведений на любой узел A будут действовать силы

$$\boldsymbol{F}_A; \tag{1}$$

$$\boldsymbol{\Psi},\ \boldsymbol{\Psi}',\ \boldsymbol{\Psi}'', \ldots, \tag{2}$$

а на любой стержень AB силы (приложенные к концам A,B)

$$\boldsymbol{R}_A,\ \boldsymbol{R}_B; \quad \boldsymbol{\Phi}_A,\ \boldsymbol{\Phi}_B. \tag{3}$$

Все эти силы вследствие самого способа их получения статически эквивалентны системе сил Σ, но еще не являются чисто узловыми, так как каждый из стержней, на который действуют силы системы Σ, подвергается действию внешних сил и в полученной нами системе (приложенных исключительно к концам стержня).

Для того чтобы исключить эти важные для стержней силы, заметим, что, не нарушая равновесия, мы можем вместо сил (1) и (2), действующих на любой узел A, подставить эквивалентную им систему сил

$$\boldsymbol{F}_A^* = \boldsymbol{F}_A + \boldsymbol{R}_A + \boldsymbol{R}_A' + \boldsymbol{R}_A'' + \ldots, \tag{1*}$$

$$\boldsymbol{\Psi}^* = \boldsymbol{\Psi} - \boldsymbol{R}_A, \quad \boldsymbol{\Psi}'^* = \boldsymbol{\Psi}' - \boldsymbol{R}_A', \quad \boldsymbol{\Psi}''^* = \boldsymbol{\Psi}'' - \boldsymbol{R}_A'', \ldots \tag{2*}$$

Положив тогда

$$\boldsymbol{\Phi}_A^* = \boldsymbol{R}_A + \boldsymbol{\Phi}_A, \quad \boldsymbol{\Phi}_B^* = \boldsymbol{R}_B + \boldsymbol{\Phi}_B, \tag{3*}$$

мы увидим, на основании равенства $\boldsymbol{\Psi} = -\boldsymbol{\Phi}_A$ и первых из равенств (2*), (3*), что

$$\boldsymbol{\Psi}^* = -\boldsymbol{\Phi}_A^*,$$

т. е. результирующая $\boldsymbol{\Phi}_A^*$ внешней силы $\boldsymbol{R}_A$ и усилия $\boldsymbol{\Phi}_A$, действующих на конец A стержня AB, обладает относительно $\boldsymbol{\Psi}^*$ характеристическим свойством внутренних сил и может быть сама истолкована как усилие.

Поступая аналогично со всеми другими узлами и стержнями, заключаем, что заданная система сил Σ статически эквивалентна системе *чисто узловых* сил, в которой сила, прямо приложенная ко всякому отдельному узлу, определяется равенством типа (1*), тогда как внутренние силы, испытываемые отдельными узлами, и усилия, испытываемые отдельными стержнями, определяются равенствами (2*), (3*) и аналогичными им.

Для того чтобы исследовать условия равновесия данной стержневой системы под действием системы сил Σ, достаточно обратиться к системе сил Σ^*; полученные таким образом условия снова можно перенести на систему сил Σ. Естественно, что если равновесие возможно, то для обеспечения его в обоих случаях будут участвовать различные внутренние силы; но когда найдены силы $\mathbf{\Phi}^*$, $\mathbf{\Psi}^*$, относящиеся к системе Σ^*, то мы можем перейти к силам $\mathbf{\Phi}$, $\mathbf{\Psi}$ реального случая, пользуясь равенствами (2*), (3*).

В качестве окончательного вывода из предыдущих рассуждений мы получаем, на основе равенств (1*), следующее *практическое правило*.

Если стержни данной стержневой системы подвергаются действию внешних сил, то каждую из них можно разложить на две (параллельные и направленные в одну и ту же сторону) силы, приложенные к концам соответствующего стержня; условия равновесия получаются при этом так, как если бы стержни были освобождены от внешних сил и каждый узел находился под действием, помимо прямо приложенных сил, также и сил, происходящих от указанного разложения.

Отсюда следует, что во всех случаях нам придется принимать во внимание исключительно условия вида „б“ п. 2.

§ 2. Односвязные стержневые системы

5. Уравнения равновесия. Оставим теперь общие рассуждения и займемся сначала односвязными системами. Конфигурация равновесия, принимаемая каждой такой стержневой системой под действием данной системы сил и представляющая собой ломаную линию, называется веревочным многоугольником (вследствие интересной интерпретации, которую мы укажем далее).

Для изучения веревочных многоугольников, возможных для данной стержневой системы, мы можем ограничиться на основании теоремы, доказанной в предыдущем пункте, рассмотрением сил, действующих исключительно на узлы.

Обозначив через $P_1, P_2, \ldots, P_n$ узлы системы (у которой, в силу предположения о простой связности, узел P_1 отличен от P_n), мы будем обозначать соответственно через $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_n$ приложенные к ним внешние силы. Что же касается (неизвестных) усилий, то совершенно бесполезно, как мы сейчас увидим, сохранять двойное обозначение $\mathbf{\Psi}$ и $\mathbf{\Phi}$ сил, относящихся к узлам и к стержням, применявшееся в предыдущих пунктах.

Действительно, если мы рассмотрим любой стержень P_iP_{i+1} и условимся обозначать через $\mathbf{\Phi}_{i+1,\,i}$ и $\mathbf{\Phi}_{i,\,i+1}$ усилия, которые он испытывает соответственно в концах P_i и P_{i+1}, то, рассматривая чисто узловую систему сил (п. 3), будем иметь

$$\mathbf{\Phi}_{i,\,i+1} = -\mathbf{\Phi}_{i+1,\,i}. \tag{4}$$

С другой стороны, на основании принципа равенства действия и противодействия, узел P_i вследствие соединения со стержнем P_iP_{i+1}