можно перенести на систему сил Σ. Естественно, что если равновесие возможно, то для обеспечения его в обоих случаях будут участвовать различные внутренние силы; но когда найдены силы $\mathbf{\Phi}^*$, $\mathbf{\Psi}^*$, относящиеся к системе Σ^*, то мы можем перейти к силам $\mathbf{\Phi}$, $\mathbf{\Psi}$ реального случая, пользуясь равенствами (2*), (3*).

В качестве окончательного вывода из предыдущих рассуждений мы получаем, на основе равенств (1*), следующее *практическое правило*.

Если стержни данной стержневой системы подвергаются действию внешних сил, то каждую из них можно разложить на две (параллельные и направленные в одну и ту же сторону) силы, приложенные к концам соответствующего стержня; условия равновесия получаются при этом так, как если бы стержни были освобождены от внешних сил и каждый узел находился под действием, помимо прямо приложенных сил, также и сил, происходящих от указанного разложения.

Отсюда следует, что во всех случаях нам придется принимать во внимание исключительно условия вида „б" п. 2.

§ 2. Односвязные стержневые системы

5. Уравнения равновесия. Оставим теперь общие рассуждения и займемся сначала односвязными системами. Конфигурация равновесия, принимаемая каждой такой стержневой системой под действием данной системы сил и представляющая собой ломаную линию, называется веревочным многоугольником (вследствие интересной интерпретации, которую мы укажем далее).

Для изучения веревочных многоугольников, возможных для данной стержневой системы, мы можем ограничиться на основании теоремы, доказанной в предыдущем пункте, рассмотрением сил, действующих исключительно на узлы.

Обозначив через $P_1, P_2, \ldots, P_n$ узлы системы (у которой, в силу предположения о простой связности, узел P_1 отличен от P_n), мы будем обозначать соответственно через $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \ldots, \boldsymbol{F}_n$ приложенные к ним внешние силы. Что же касается (неизвестных) усилий, то совершенно бесполезно, как мы сейчас увидим, сохранять двойное обозначение $\mathbf{\Psi}$ и $\mathbf{\Phi}$ сил, относящихся к узлам и к стержням, применявшееся в предыдущих пунктах.

Действительно, если мы рассмотрим любой стержень P_iP_{i+1} и условимся обозначать через $\mathbf{\Phi}_{i+1,\,i}$ и $\mathbf{\Phi}_{i,\,i+1}$ усилия, которые он испытывает соответственно в концах P_i и P_{i+1}, то, рассматривая чисто узловую систему сил (п. 3), будем иметь

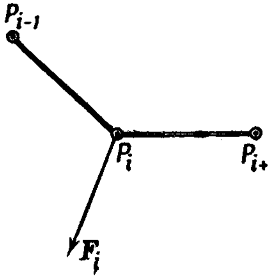
$$\mathbf{\Phi}_{i,\,i+1} = -\mathbf{\Phi}_{i+1,\,i}. \tag{4}$$

С другой стороны, на основании принципа равенства действия и противодействия, узел P_i вследствие соединения со стержнем P_iP_{i+1}

испытывает действие силы, прямо противоположной $\Phi_{i+1,\,i}$, которая поэтому, на основании равенства (4), тождественна с $\Phi_{i,\,i+1}$.

Прежде чем идти далее, остановимся еще на обозначениях, введенных нами для усилий. Во всяком символе $\Phi_{i,\,i+1}$ или $\Phi_{i+1,\,i}$ оба индекса обозначают стержень, к которому отнесено усилие, идет ли речь об усилиях, испытываемых им самим, или о силах, с которыми он действует на узлы. Если стержень рассматривается как воспринимающий усилие, то *второй индекс*, согласно принятому выше соглашению, обозначает тот конец стержня, к которому приложено усилие; если же, наоборот, мы будем рассматривать узел, например P_i, с которым соединены стержни $P_{i-1}P_i$ и P_iP_{i+1}, то силами, действующими на P_i, соответственно будут $\Phi_{i,\,i-1}$ и $\Phi_{i,\,i+1}$, так что узел, к которому приложена сила, определяется *первым индексом*.

Важно еще заметить, что если усилие $\Phi_{i,\,i+1}$ (или $\Phi_{i+1,\,i}$) является растягивающим, то порядок $i,\ i+1$ (или соответственно $i+1,\ i$) индексов находится в согласии со стороной P_iP_{i+1} (или $P_{i+1}P_i$), в которую действует усилие (на конец ли P_{i+1} стержня P_iP_{i+1} или на узел P_i).



Фиг. 47.

Наконец полезно заметить, что в дальнейших статических исследованиях, для того чтобы привести вспомогательные величины к наименьшему числу, можно ограничиться, на основании равенства (4), введением лишь усилий типа $\Phi_{i,i+1}$, так как другие усилия, в которых имеется обращение (инверсия) индексов, им равны и прямо противоположны.

Выразим теперь условия равновесия, которые, как мы видели в предыдущем пункте, будут исключительно типа „б" из п. 2. Так как на каждый промежуточный узел действуют три силы, а именно: сила $\boldsymbol{F}_i$ (фиг. 47) и силы:

$$\Phi_{i,\,i-1} = -\Phi_{i-1,\,i} \quad \text{и} \quad \Phi_{i,\,i+1},$$

представляющие собой реакции стержней $P_{i-1}P_i$ и P_iP_{i+1}, то мы будем иметь

$$\boldsymbol{F}_i - \Phi_{i-1,\,i} + \Phi_{i,\,i+1} = 0 \qquad (i = 2,\ 3,\ \ldots,\ n-1). \tag{5}$$

Наоборот, в каждом из концевых узлов P_1 и P_2 прямо приложенная сила должна быть уравновешена одной реакцией, и мы должны иметь

$$\boldsymbol{F}_1 + \Phi_{12} = 0, \qquad \boldsymbol{F}_n - \Phi_{n-1,\,n} = 0. \tag{6}$$

Уравнения (5) и (6) в своей совокупности, как обеспечивающие равновесие отдельных твердых частей системы, и дают *необходи-*

мые и достаточные условия для равновесия (односвязной) *стержневой системы.*

Уравнения (5) называются *неопределенными уравнениями* (или *условиями*) равновесия, а уравнения (6), относящиеся к крайним узлам, — *уравнениями* (или *условиями*) *на концах.*

Если мы обратим внимание на то, что усилия Φ имеют линиями действия стороны веревочного многоугольника, то увидим, что для равновесия имеют значение соотношения между внешними силами, геометрическая конфигурация и величина усилий.

В большей части практических случаев усилия представляют собой неизвестные силы, которые требуется определить, предполагая, что веревочный многоугольник задан, или же неизвестна конфигурация равновесия, и нам нужно определить ее по данным задачи, исключая или, по крайней мере, принимая за вспомогательные неизвестные величины усилий.

6. Для того чтобы равновесие стержневой системы было возможно и в этом случае, как и во всяком другом, должны удовлетворяться *основные уравнения*, т. е. система приложенных векторов, представляющих собой внешние силы $\boldsymbol{F}_i$, должна быть эквивалентна нулю. Отсюда можно заранее заключить, что это последнее условие должно неявно содержаться в векторных уравнениях (5) и (6); это легко проверить и на самих этих уравнениях.

В самом деле, так как силы, входящие в уравнения (5) и (6), приложены *к одной и той же точке* и потому результирующий момент их относительно общей точки приложения равен нулю, то каждое из этих уравнений можно истолковать не только как соотношение эквиполлентности, но и как соотношение эквивалентности между системами приложенных векторов (гл. I, п. 38). То же свойство будет выражать и уравнение, которое получится, если почленно сложить уравнения (5) и (6); выполняя сложение и принимая во внимание равенства (4), получим уравнение

$$\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \ldots + \boldsymbol{F}_n = 0,$$

которое выражает, что система приложенных векторов $\boldsymbol{F}_i$ эквивалентна нулю.

Эта эквивалентность является, таким образом, следствием векторных уравнений (5) и (6); однако, поскольку эти уравнения не только необходимы, но также и *достаточны* для равновесия стержневой системы, они в общем случае неявно содержат дальнейшие условия.

Эти условия выражаются теоремой, которую мы докажем в следующем пункте и которая дает для условий равновесия односвязной стержневой системы механически выразительную и удобную для некоторых приложений форму.

7. *Для того чтобы односвязная стержневая система, находящаяся под действием данной системы внешних сил, была в равновесии, необходимо и достаточно, чтобы система внешних сил была эквивалентна нулю и чтобы, кроме того, результирующий момент, относительно каждого отдельно взятого узла, внешних сил, приложенных к предыдущим (или последующим) узлам, был равен нулю.*

Чтобы доказать, что высказанные условия необходимы для равновесия, припомним прежде всего, что при равновесии [т. е. когда выполняются уравнения (5) и (6)] система внешних сил $\boldsymbol{F}_i$ векторно эквивалентна нулю. Кроме того, если сложим почленно первое из уравнений (6) и первые $i-1$ из уравнений (5), рассматривая их как соотношения эквивалентности между системами приложенных векторов, то получим, принимая во внимание равенства (4), соотношение

$$\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\ldots+\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{\Phi}_{i,i+1}=0, \tag{7}$$

которое выражает, что система внешних сил $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \ldots, \boldsymbol{F}_i$ векторно эквивалентна единственному усилию $-\boldsymbol{\Phi}_{i,i+1}=\boldsymbol{\Phi}_{i+1,i}$, имеющему линией действия отрезок P_iP_{i+1}, и поэтому результирующий момент этой системы относительно каждого из узлов P_i, P_{i+1} равен нулю.

Наоборот, если предположим условия теоремы выполненными, то прежде всего будем иметь соотношение эквивалентности

$$\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\ldots+\boldsymbol{F}_n=0; \tag{8}$$

кроме того, так как результирующий момент системы внешних сил $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \ldots, \boldsymbol{F}_i$ (при $i=1, 2, \ldots, n-1$) относительно узла P_i равен нулю, то эта система эквивалентна (гл. I, п. 39) одному вектору, приложенному в P_i, который мы можем обозначить через $\boldsymbol{\Phi}_{i+1,i}=-\boldsymbol{\Phi}_{i,i+1}$, так что будут справедливы уравнения (7) при $i=1, 2, \ldots, n-1$, причем все они будут представлять собой соотношения эквивалентности. Вычитая почленно из равенства (8) равенство (7) при $i=n-1$, а из каждого из равенств (7) равенство с индексом непосредственно низшим, мы последовательно получим равенства:

$$\boldsymbol{F}_n-\boldsymbol{\Phi}_{n-1,n}=0,\quad \boldsymbol{F}_i-\boldsymbol{\Phi}_{i-1,i}+\boldsymbol{\Phi}_{i,i+1}=0 \quad (i=1, 2, \ldots, n-1),$$

которые, будучи присоединены к последнему из равенств (7), т. е. к равенству

$$\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{\Phi}_{12}=0,$$

будут иметь в точности вид уравнений равновесия (неопределенных и на пределах) стержневой системы (п. 5). Докажем теперь, что равновесие существует при условии, что приложенные векторы $\boldsymbol{\Phi}_{i,i+1}$, которые мы формально определили посредством уравнений (7), имеют характер усилий, т. е. каждый из них имеет линией действия прямую P_iP_{i+1}.

Для этой цели рассмотрим соотношения эквивалентности

$$\boldsymbol{F}_i - \boldsymbol{\Phi}_{i-1,i} + \boldsymbol{\Phi}_{i,i+1} = 0$$

или, в другом виде,

$$\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{\Phi}_{i,i+1} = \boldsymbol{\Phi}_{i-1,i},$$

и вспомним, что два приложенных вектора $\boldsymbol{F}_i$ и $\boldsymbol{\Phi}_{i,i+1}$ имеют оба началом точку P_i (первый по определению, второй по предположению), так что по отношению к этому узлу их результирующий момент равен нулю. Поэтому будет равен нулю также и момент относительно P_i вектора $\boldsymbol{\Phi}_{i-1,i}$, эквивалентного им, а так как этот вектор, по определению, приложен в P_{i-1}, то он имеет линией действия прямую $P_{i-1}P_i$.

8. Силовой многоугольник, или многоугольник Вариньона. Условие (необходимое для равновесия односвязной стержневой системы $P_1P_2 \ldots P_n$), заключающееся в том, что результирующая внешних сил $\boldsymbol{F}_i$ должна быть равна нулю, геометрически выражается тем, что векторный многоугольник, построенный для сил $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2, \ldots, \boldsymbol{F}_n$, должен быть замкнутым. Другими словами, если, задав точку Q_1, определить $n-1$ точек $Q_2, Q_3, \ldots, Q_n$ последовательно равенствами

$$Q_2 - Q_1 = \boldsymbol{F}_1, \quad Q_3 - Q_2 = \boldsymbol{F}_2, \ldots, \quad Q_n - Q_{n-1} = \boldsymbol{F}_{n-1}, \tag{9}$$

или, в другом виде,

$$\overrightarrow{Q_1Q_2} = \boldsymbol{F}_1, \quad \overrightarrow{Q_2Q_3} = \boldsymbol{F}_2, \ldots, \quad \overrightarrow{Q_{n-1}Q_n} = \boldsymbol{F}_{n-1},$$

то будем иметь

$$Q_1 - Q_n = \boldsymbol{F}_n,$$

или, что одно и то же,

$$\overrightarrow{Q_nQ_1} = \boldsymbol{F}_n.$$

Многоугольник (замкнутый) $Q_1Q_2 \ldots Q_n$, который таким образом надо присоединить к веревочному многоугольнику $P_1P_2 \ldots P_n$, называется *силовым многоугольником* или *многоугольником Вариньона*. Он обладает одним характерным свойством, которое мы здесь установим и которое позволит свести к простым геометрическим построениям решение задач о равновесии односвязных стержневых систем.

9. *В силовом многоугольнике* $Q_1Q_2 \ldots Q_n$ (фиг. 48), *присоединенном к веревочному многоугольнику* $P_1P_2 \ldots P_n$, *стороны и диагонали* $Q_2Q_1, Q_3Q_1, \ldots, Q_nQ_1$, *направленные в сторону* Q_1,

будут соответственно эквиполлентны усилиям $\Phi_{1,2}$, $\Phi_{2,3}$, ..., $\Phi_{n-1,n}$.

Действительно, припомним прежде всего, что вектор $\overrightarrow{Q_2Q_1} = -\overrightarrow{Q_1Q_2}$ эквиполлентен вектору $-\boldsymbol{F}_1$ и что вследствие первого из равенств (6) этот вектор эквиполлентен $\Phi_{1.2}$.

Что же касается вектора $\overrightarrow{Q_3Q_1}$, то возьмем равенство (5) при $i=2$, т. е. равенство

$$\boldsymbol{F}_2 - \Phi_{1,2} + \Phi_{2,3} = 0.$$

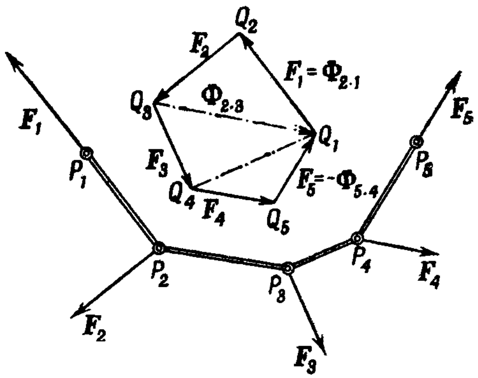
Принимая во внимание только что полученный результат и вспоминая, что по построению вектор $\overrightarrow{Q_2Q_3}$ эквиполлентен вектору $\boldsymbol{F}_2$, можно написать предыдущее равенство в виде

$$\overrightarrow{Q_2Q_3} - \overrightarrow{Q_2Q_1} + \Phi_{2,3} = 0,$$

или

$$\Phi_{2,3} = \overrightarrow{Q_3Q_2} + \overrightarrow{Q_2Q_1},$$

откуда заключаем, что вектор $\overrightarrow{Q_3Q_1}$ эквиполлентен вектору $\Phi_{2,3}$.



Фиг. 48.

Таким образом будем продолжать до тех пор, пока не дойдем до вектора $\overrightarrow{Q_nQ_1}$, который, будучи эквиполлентен силе $\boldsymbol{F}_n$, будет также эквиполлентен, вследствие второго из равенств (6), усилию $\Phi_{n-1,n}$.

Наоборот, *если для какого-нибудь многоугольника* $P_1P_2 \ldots P_n$ *можно построить такой замкнутый многоугольник* $Q_1Q_2 \ldots Q_n$, *что стороны и диагонали* Q_2Q_1, Q_3Q_1, ..., Q_nQ_1, *сходящиеся в* Q_1, *будут соответственно параллельны прямым* P_1P_2, P_2P_3, ..., $P_{n-1}P_n$, *то многоугольник* $P_1P_2 \ldots P_n$ *будет представлять собой веревочный многоугольник, для которого* $Q_1Q_2 \ldots Q_n$ *является силовым многоугольником.*

Действительно, если представим себе, что на стержневую систему $P_1P_2 \ldots P_n$ в узлах P_1, P_2, ..., P_n действуют силы, эквиполлентные векторам $\overrightarrow{Q_1Q_2}$, $\overrightarrow{Q_2Q_3}$, ..., $\overrightarrow{Q_nQ_1}$, и в качестве усилий $\Phi_{1,2}$, $\Phi_{2,3}$, ..., $\Phi_{n-1,n}$ соответственно принимаются векторы $\overrightarrow{Q_2Q_1}$, $\overrightarrow{Q_3Q_1}$, ..., $\overrightarrow{Q_nQ_1}$, то, на основании сделанных допущений о двух многоугольниках, будут непосредственно выполняться условия (5) и (6), необходимые и достаточные для равновесия стержневой системы.

10. Доказанное таким образом характеристическое свойство силового многоугольника позволяет, как мы об этом уже говорили, решать посредством геометрических построений задачи, относящиеся к равновесию односвязных стержневых систем.

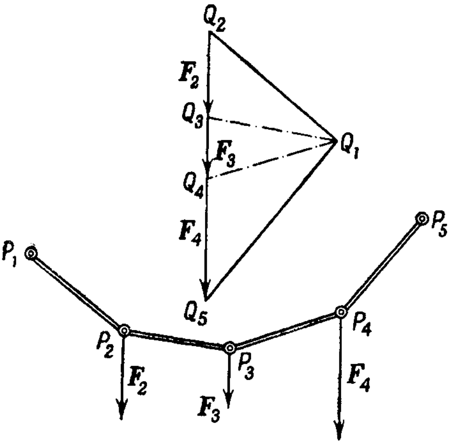
Для того чтобы дать типичный пример приложения этого метода, рассмотрим стержневую систему $P_1P_2 \dots P_n$, прикрепленную на конце P_1 к неподвижному шарниру и имеющую свободными другой конец и промежуточные узлы (за исключением лишь связей, происходящих от соединения их со стержнями). Представим себе, что к $n-1$ узлам $P_2, P_3, \dots, P_n$ приложены заданные силы $\boldsymbol{F}_2$, $\boldsymbol{F}_3, \dots, \boldsymbol{F}_n$, и определим веревочный многоугольник (или конфигурацию равновесия системы) и реакцию в неподвижном конце P_1.

Прежде всего силовой многоугольник можно построить непосредственно, откладывая один за другим, начиная от произвольной точки Q_2, приложенные векторы $\overrightarrow{Q_2Q_3}$, $\overrightarrow{Q_3Q_4}, \dots, \overrightarrow{Q_nQ_1}$, соответственно эквиполлентные векторам $\boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{F}_3, \dots, \boldsymbol{F}_n$; после этого замыкающий вектор $\overrightarrow{Q_1Q_2}$ представит по величине, направлению и стороне реакцию $\boldsymbol{F}_1$ в неподвижной точке.

Что же касается веревочного многоугольника, то вспомним, что его стороны должны быть параллельны соответственно отрезкам Q_2Q_1, $Q_3Q_1, \dots, Q_nQ_1$. Поэтому, начиная с закрепленной точки P_1, мы должны направить первый стержень P_1P_2 параллельно Q_1Q_2 в ту или другую из двух возможных сторон; эта неопределенность в выборе стороны будет сохраняться до тех пор, пока мы не будем знать заранее, должно ли быть усилие $\Phi_{1,2}$ растягивающим или сжимающим. Определив P_2, мы получим положение точки P_3, направив стержень P_2P_3 параллельно Q_3Q_1 (в ту или другую сторону в согласии с только что сказанным о характере усилия $\Phi_{1,2}$); так нужно поступать до тех пор, пока, направив стержень $P_{n-1}P_n$ параллельно Q_nQ_1 (в ту же самую сторону или в противоположную), мы не получим положение равновесия свободного конца P_n.

11. Параллельные силы. Менее просто, чем в предыдущем случае, выполняется геометрическое построение веревочного многоугольника, когда стержневая система прикреплена (посредством шарниров) к неподвижным точкам на обоих концах P_1, P_n и задаются силы, приложенные в $n-2$ промежуточных узлах. Здесь мы ограничимся рассмотрением этой задачи в том случае, когда $n-2$ силы $\boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{F}_3, \dots, \boldsymbol{F}_{n-1}$ параллельны и направлены в одну и ту же сторону (фиг. 49); заметим, что это частное предположение заслуживает рассмотрения потому, что оно осуществляется в случае, когда внешние силы, действующие на систему, представляют собой силы тяжести.

Прежде всего легко убедиться, что, независимо от того, закреплены концы или нет, в том случае, *когда в системе сил, приложенных к узлам и способных поддерживать равновесие, силы, прямо приложенные к промежуточным узлам, параллельны* (и направлены в какую угодно сторону), *силовой многоугольник будет плоским.*



Фиг. 49.

В самом деле, в этом случае стороны Q_2Q_3, Q_3Q_4, ..., $Q_{n-1}Q_n$ силового многоугольника будут лежать на одной прямой, так что, каково бы ни было положение оставшейся вершины Q_1, приложенные векторы $\overrightarrow{Q_2Q_1}$, $\overrightarrow{Q_3Q_1}$, ..., $\overrightarrow{Q_nQ_1}$, представляющие собой усилия, будут компланарны, а поэтому такими же будут и стороны P_1P_2, P_2P_3, ..., $P_{n-1}P_n$ веревочного многоугольника, поскольку они должны быть параллельны усилиям.

12. Предположим теперь опять, что оба конца P_1, P_n стержневой системы закреплены, и, рассматривая $n-2$ параллельные силы как веса, обозначим величины их через p_2, p_3, ..., p_{n-1}.

Для того чтобы определить силовой многоугольник, будем идти аналитическим путем. Возьмем в вертикальной плоскости, проходящей через точки P_1 и P_n, в которой должен лежать веревочный многоугольник (см. предыдущий пункт), декартову систему осей Oxy с осью y, направленной вверх, и обозначим через x_1, y_1 и x_n, y_n координаты точек P_1, P_n, а через l_1, l_2, ..., l_{n-1} — длины стержней P_1P_2, P_2P_3, ..., P_{n-1}, P_n.

За главные неизвестные задачи примем углы α_1, α_2, ..., α_{n-1}, которые эти стержни (каждый из них направлен в сторону обхода веревочного многоугольника от P_1 к P_n) образуют с направлением оси x; заметим при этом, что для определения их мы должны воспользоваться уравнениями равновесия (5) и (6). Обратим внимание только на неопределенные уравнения

$$\boldsymbol{F}_i - \boldsymbol{\Phi}_{i-1,i} + \boldsymbol{\Phi}_{i,i+1} = 0 \qquad (i = 2, 3, \ldots, n-1),$$

так как уравнения (6) служат лишь для определения двух последних неизвестных (сил $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_n$, приложенных к закрепленным узлам P_1 и P_n) и не влияют на форму многоугольника.

Далее, уравнения (5) (представляющие собой $n-2$ векторных уравнений в плоскости) переходят в $2(n-2)$ скалярных уравнений между горизонтальными и вертикальными проекциями. Так как горизонтальные проекции сил Φ_i равны нулю, то, проектируя уравнения (5) на ось x, мы увидим, что *усилия* $\Phi_{1,2}$, $\Phi_{2,3}, \ldots$, $\Phi_{n-1,n}$ *все имеют одинаковые горизонтальные проекции.*

Здесь мы можем ограничиться рассмотрением случая, когда эти проекции, общую величину которых мы обозначим через φ, отличны от нуля. Действительно, если какое-нибудь из усилий обращается в нуль, то можно представить себе, что связность в соответствующем узле устранена без нарушения равновесия, и тогда задача оказывается сведенной к двум различным задачам, относящимся к многоугольникам с меньшим числом стержней. Исключив этот случай, никакое усилие уже нельзя считать равным нулю; и тогда предположение $\varphi=0$ будет означать, что усилия, а вместе с ними и стороны веревочного многоугольника, все будут вертикальными. Если мы оставим в стороне не представляющий интереса случай, когда P_1 и P_n находятся на одной и той же вертикали, то упомянутая только что возможность исключается, поэтому следует считать, что $\varphi \neq 0$.

Теперь, принимая φ за вспомогательную неизвестную, мы в состоянии выразить через φ и через главные неизвестные $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ вертикальные составляющие усилий. Достаточно заметить, что если они имеют линиями действия P_1P_2, P_2P_3, $\ldots$, $P_{n-1}P_n$, то отношения (конечные в силу предположения, что $\varphi \neq 0$) между величинами вертикальных и горизонтальных составляющих выражаются (каково бы ни было направление отдельных усилий) тангенсами углов наклона α_1, α_2, $\ldots$, α_{n-1}, так что величины вертикальных составляющих соответственно будут иметь значения

$$\varphi \operatorname{tg} \alpha_1, \quad \varphi \operatorname{tg} \alpha_2, \ldots, \quad \varphi \operatorname{tg} \alpha_{n-1}.$$

Проектируя векторные уравнения (5) на ось y (вертикальную и направленную вверх), мы получим уравнения

$$p_i + \varphi \operatorname{tg} \alpha_{i-1} = \varphi \operatorname{tg} \alpha_i \qquad (i=2, 3, \ldots, n-1), \tag{10}$$

к которым необходимо присоединить уравнения, связывающие x_n, y_n с x_1, y_1, l и α. Эти два уравнения можно получить, спроектировав веревочный многоугольник $P_1P_2 \ldots P_{n-1}P_n$ на две оси координат и выразив, что эти проекции являются не чем иным, как $x_n - x_1$, $y_n - y_1$.

Таким образом, мы получим

$$\begin{aligned} x_n &= x_1 + \sum_{i=1}^{n-1} l_i \cos \alpha_i, \\ y_n &= y_1 + \sum_{i=1}^{n-1} l_i \sin \alpha_i. \end{aligned} \tag{11}$$

Уравнения (10), (11) в совокупности составляют n уравнений между таким же числом неизвестных $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, \varphi$. Для решения их удобно положить

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\psi}{\varphi},$$

что, конечно, возможно, так как, на основании сделанного выше замечания, φ можно предполагать не равным нулю. Суммируя уравнения (10) от $i = 2$ до любого i и сокращая в полученном уравнении члены $\varphi \operatorname{tg} \alpha_2, \varphi \operatorname{tg} \alpha_3, \ldots, \varphi \operatorname{tg} \alpha_{i-1}$, общие обеим частям уравнения, будем иметь

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\psi + \sum_{j=2}^{i} p_j}{\varphi} \qquad (i = 2, \ldots, n-1). \qquad (10')$$

Уравнения (10′) вместе с равенством $\operatorname{tg} \alpha_1 = \psi/\varphi$ выражают тангенс любого угла α_i через ψ и φ. Если определим из этих уравнений обычным способом $\cos \alpha$ и $\sin \alpha$ и внесем их значения в уравнения (11), то получим два уравнения между φ и ψ, пригодных для определения этих величин. Следует, однако, предупредить, что действительное определение φ и ψ в общем случае будет очень сложным: для $n = 3$ положение точки P_2 определяется непосредственно, если будут заданы длины P_1P_2, P_3P_2; но уже при $n = 4$ уравнения для φ и ψ, освобожденные от радикалов, имеют довольно высокую степень.

§ 3. Геометрическое исследование плоских решетчатых балок (ферм)

13. Перейдем теперь к многосвязным стержневым системам. Мы будем рассматривать только один класс таких систем, так называемые *плоские решетчатые балки* или *фермы*, т. е. системы, составленные из стержней, расположенных в одной и той же плоскости (и, следовательно, содержащие цилиндрические шарниры).

Фермы могут быть двух видов: изменяемые и неизменяемые. Изменяемые фермы, как и односвязные системы, могут принимать непрерывную совокупность различных конфигураций. Таким, например, является какой угодно простой (замкнутый) многоугольник или также многоугольник с добавочным стержнем, один конец которого соединен шарниром с какой-нибудь вершиной многоугольника.

Неизменяемая ферма должна иметь число стержней, достаточное для обеспечения неизменяемости своей конфигурации. Таким будет, например, *полный многоугольник*, в частности четырехугольник с обеими его диагоналями.