Уравнения (10), (11) в совокупности составляют n уравнений между таким же числом неизвестных $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, \varphi$. Для решения их удобно положить

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{\psi}{\varphi},$$

что, конечно, возможно, так как, на основании сделанного выше замечания, φ можно предполагать не равным нулю. Суммируя уравнения (10) от $i = 2$ до любого i и сокращая в полученном уравнении члены $\varphi\operatorname{tg}\alpha_2, \varphi\operatorname{tg}\alpha_3, \ldots, \varphi\operatorname{tg}\alpha_{i-1}$, общие обеим частям уравнения, будем иметь

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{\psi + \sum_{j=2}^{i} p_j}{\varphi} \qquad (i = 2, \ldots, n-1). \qquad (10')$$

Уравнения (10′) вместе с равенством $\operatorname{tg}\alpha_1 = \psi/\varphi$ выражают тангенс любого угла α_i через ψ и φ. Если определим из этих уравнений обычным способом $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ и внесем их значения в уравнения (11), то получим два уравнения между φ и ψ, пригодных для определения этих величин. Следует, однако, предупредить, что действительное определение φ и ψ в общем случае будет очень сложным: для $n = 3$ положение точки P_2 определяется непосредственно, если будут заданы длины P_1P_2, P_3P_2; но уже при $n = 4$ уравнения для φ и ψ, освобожденные от радикалов, имеют довольно высокую степень.

§ 3. Геометрическое исследование плоских решетчатых балок (ферм)

13. Перейдем теперь к многосвязным стержневым системам. Мы будем рассматривать только один класс таких систем, так называемые *плоские решетчатые балки* или *фермы*, т. е. системы, составленные из стержней, расположенных в одной и той же плоскости (и, следовательно, содержащие цилиндрические шарниры).

Фермы могут быть двух видов: изменяемые и неизменяемые. Изменяемые фермы, как и односвязные системы, могут принимать непрерывную совокупность различных конфигураций. Таким, например, является какой угодно простой (замкнутый) многоугольник или также многоугольник с добавочным стержнем, один конец которого соединен шарниром с какой-нибудь вершиной многоугольника.

Неизменяемая ферма должна иметь число стержней, достаточное для обеспечения неизменяемости своей конфигурации. Таким будет, например, *полный многоугольник*, в частности четырехугольник с обеими его диагоналями.

Неизменяемые фермы в свою очередь делятся на два класса: неизменяемые фермы *без лишних стержней* и неизменяемые фермы *с лишними стержнями*. В первом случае достаточно удалить один стержень для того, чтобы ферма стала изменяемой; во втором случае можно удалить один или несколько стержней, не нарушая жесткости системы.

Мы рассмотрим здесь подробно неизменяемые фермы без лишних стержней. Прежде всего мы выведем общее соотношение между числом n узлов и числом m стержней, справедливое для всякой такой системы.

Так как система неизменяема, то ее положение в плоскости, как и положение всякой другой неизменяемой плоской системы (гл. V, п. 2), должно быть однозначно определено, когда заданы положения двух ее точек, например двух узлов P_α, P_β, лежащих в концах одного и того же стержня. Это, с аналитической точки зрения, приводится к тому, что $2(n-2)$ координат других $n-2$ узлов P_i (где индекс i принимает все значения $1, 2, \ldots, n$, за исключением α и β) должны однозначно определяться структурой системы, т. е. длинами $m-1$ стержней, отличных от того, который соединяет узлы P_α и P_β. Каждый из этих стержней, если обозначим через P_i и P_j его концы, через x_i, y_i и x_j, y_j — соответствующие координаты, через $l_{ij}=l_{ji}$ — длину, даст уравнение

$$(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2=l_{ij}^2 \qquad (i,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n\neq\alpha,\ \beta). \tag{12}$$

А для того чтобы из этой системы $m-1$ уравнений можно было определить $2(n-2)$ неизвестных x_i, y_i, необходимо и достаточно, вообще говоря, чтобы было $m-1=2(n-2)$, т. е.

$$m=2n-3. \tag{13}$$

Из этого условия вытекает, между прочим, как необходимое следствие, что в соответствующей неизменяемой ферме без лишних стержней имеется, по крайней мере, один узел, из которого выходит не более трех стержней. Действительно, если из каждого из n узлов выходило бы больше трех стержней, то полное число m их было бы не меньше чем $4n/2=2n$, вопреки равенству (13). Подобным же образом из равенства (13) следует, что если $n<6$, то, по крайней мере, из одного из узлов фермы выходят только два стержня.

14. Как уже было замечено, условие (13), к которому мы пришли путем сопоставления числа неизвестных и числа уравнений, достаточно для обеспечения неизменяемости системы только *вообще*, т. е. при условии, что $m-1=2(n-2)$ уравнений (12) являются совместными и независимыми друг от друга; для этой цели достаточно, как известно, чтобы не был тождественно равен нулю якобиан J левых частей уравнений (12) по x_i, y_i (при $i=1$, $2, \ldots, n$, за исключением α и β).

Когда это условие не имеет места, решетчатая система, даже в предположении, что уравнение (13) удовлетворяется, может оказаться изменяемой. В качестве примера представим себе полный плоский четырехугольник с лишним стержнем, шарнирно соединенным одним концом с какой-нибудь вершиной четырехугольника. Уравнение (13) удовлетворяется, так как имеется пять узлов и семь стержней, тогда как система очевидно является изменяемой.

Но бывают также исключительные, или, как мы будем говорить, *особые* случаи в некоторой степени противоположного свойства, когда ферма неизменяема и не имеет лишних стержней и все же уравнение (13) не удовлетворяется. Чтобы дать наиболее простой пример такой фермы, рассмотрим систему, составленную из $n>3$ узлов $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и n стержней $P_1P_2, P_2P_3, \ldots, P_nP_1$. Если длина каждого из стержней будет меньше суммы длин остальных $n-1$ стержней, то мы будем иметь простой многоугольник, очевидно, изменяемый; но если, например, длина l_n стержня P_1P_n равна сумме длин $l_i (i=1, 2, \ldots, n-1)$ остальных $n-1$ стержней, то система может иметь узлы только на прямой P_1P_n; в этой своей единственно возможной конфигурации она будет неизменяемой, между тем как числа узлов и стержней, оба равные $n>3$, не удовлетворяют условия (13). Другие менее тривиальные примеры ферм, особых в указанном смысле, будут приведены после общих соображений, которые мы изложим в следующем пункте.

15. Заметим, что можно заранее предвидеть, каково может быть происхождение таких особых случаев. Действительно, в области вещественных чисел, которой мы здесь и должны ограничиться, существуют такие случаи систем уравнений, когда число неизвестных больше числа уравнений и все же все неизвестные могут быть однозначно определены. Простым примером этого может служить уравнение $x^2+y^2=0$, имеющее корни $x=0$, $y=0$.

Обратимся к исследованию возможности указанных выше особых типов ферм; для этой цели рассмотрим какую-нибудь систему m уравнений

$$f_1=0, \quad f_2=0, \ldots, \quad f_m=0 \tag{14}$$

с N неизвестными $z_1, z_2, \ldots, z_N$. Предположив $m<N$, допустим, что система удовлетворяется некоторыми N значениями неизвестных, причем эти значения всегда можно предположить приведенным к $z_\nu=0$ $(\nu=1, 2, \ldots, N)$; пусть в окрестности этого решения функции f_h можно разложить в ряд Маклорена. Выставляя на вид члены первого порядка, будем иметь

$$f_h=\sum_{\nu=1}^{N} a_{h\nu} z_\nu + F_h \qquad (h=1, 2, \ldots, m), \tag{15}$$

где $a_{h\nu}$ суть постоянные, тогда как F_h означают такие функции, разложения которых в степенные ряды по z_ν начинаются с членов степени не ниже второй.

Если якобиева матрица от функций f_h по z_ν при $z_\nu=0$ ($\nu=1, 2, \ldots, N$), т. е. матрица

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mN} \end{Vmatrix} \tag{16}$$

будет ранга m, то система (14) будет однозначно разрешимой относительно m неизвестных из z_ν, а остальные $N-m$ неизвестных останутся неопределенными.

Рассмотрим здесь случай, когда матрица (16) имеет ранг, меньший m. При этом предположении между m линейными формами, составленными из членов первого порядка отдельных функций (15), будет существовать, по крайней мере, одно тождественное соотношение (с коэффициентами, не равными одновременно нулю)

$$\sum_{h=1}^{m} \mu_h \sum_{\nu=1}^{N} a_{h\nu} z_\nu = 0,$$

которое, если предположим для определенности, что $\mu_m \lessgtr 0$, можно написать в виде

$$\sum_{\nu=1}^{N} a_{m\nu} z_\nu + \sum_{h=1}^{m-1} \lambda_h \sum_{\nu=1}^{N} a_{h\nu} z_\nu = 0. \tag{17}$$

Отсюда следует, что функция

$$f_m + \sum_{h=1}^{m-1} \lambda_h f_h$$

не имеет членов первого порядка, так что мы будем иметь

$$f_m + \sum_{h=1}^{m-1} \lambda_h f_h = \varphi + \psi, \tag{18}$$

где φ означает некоторую квадратичную форму относительно z_ν

$$\varphi = \frac{1}{2} \sum_{\nu, \rho=1}^{N} b_{\nu\rho} z_\nu z_\rho, \tag{19}$$

а ψ есть функция, разложение которой в степенной ряд по z_ν начинается с членов, по крайней мере, третьего порядка.

Легко убедиться, что если квадратичная форма φ является определенной, то из уравнений (14), даже если число их меньше числа неизвестных, можно однозначно определить эти неизвестные.

так как в достаточно малой окрестности I начала координат эти уравнения будут удовлетворяться только значениями

$$z_\nu = 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots, N).$$

Заметим прежде всего, что функции f не могут все обратиться в нуль, если не обращается в нуль выражение (18); покажем, что при заданном определенном характере квадратичной формы (19) выражение (18) в окрестности I начала координат может обратиться в нуль только тогда, когда обращаются в нуль все аргументы.

В самом деле, полагаем z_ν в виде $z_\nu = \rho\alpha_\nu$, где

$$\sum_{\nu=1}^{N} \alpha_\nu^2 = 1, \qquad \rho^2 = \sum_{\nu=1}^{N} z_\nu^2;$$

это (если воспользоваться языком пространства n измерений) равнозначно введению модуля ρ и направляющих косинусов вектора, приложенного в начале координат и имеющего концом точку с координатами $z_1, z_2, \ldots, z_N$. В силу предположения, что квадратичная форма φ является определенной, наименьшее из абсолютных значений формы

$$\varphi_\alpha = \frac{1}{2} \sum_{\nu, \rho=1}^{N} b_{\nu\rho}\alpha_\nu\alpha_\rho$$

для действительных значений величин α, удовлетворяющих уравнению гиперсферы с центром в начале координат и с радиусом, равным единице,

$$\sum_{\nu=1}^{N} \alpha_\nu^2 = 1$$

является, конечно, числом M, большим нуля. С другой стороны, функция ψ, если для z берутся указанные выше выражения, принимает вид

$$\rho^3\chi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n|\rho),$$

где χ для достаточно малых значений ρ является конечной и непрерывной функцией своих аргументов и, следовательно, в окрестности I начала координат по абсолютной величине остается меньше вполне определенной положительной постоянной M'. После этого непосредственно ясно, что если не исчезают все z_ν, т. е. если имеем $\rho > 0$, то не может выполняться равенство

$$\varphi + \psi = 0,$$

потому что его левая часть, если разделить ее на ρ^2, принимает вид

$$\varphi_\alpha + \rho\chi;$$

абсолютное значение первого слагаемого не может быть меньше M, тогда как абсолютное значение второго при $\rho < M/M'$ будет, конечно, меньше M.

16. Предположения аналитического характера, сделанные выше и заключающиеся в том, что ранг матрицы (16) меньше m и квадратичная форма φ определенная, можно истолковать наглядно. Из тождества (18) следует, что в разложении функции

$$f_m + \sum_{h=1}^{m-1} \lambda_h f_h \tag{20}$$

по степеням z часть первой степени равна нулю, в то время как часть второй степени представляется в виде определенной квадратичной формы φ.

Поэтому если мы будем рассматривать координаты z как бесконечно малые или, что равносильно, вместо каждого z_ν представим соответствующий дифференциал dz_ν, то увидим, что первый дифференциал функции (20) будет равен нулю, тогда как второй дифференциал определится формой $\varphi(dz)$; так как эта последняя представляет собой определенную квадратичную форму, то мы заключаем, что для функции (20) выполняются условия существования максимума или минимума. Наоборот, если эти условия удовлетворены, то достаточно вместо отдельных dz_ν подставить соответствующие z_ν, для того чтобы снова придти к равенству (18), где функция φ будет представлять собой определенную квадратичную форму.

Теперь, на основании формы (20) и теории условного максимума или минимума, очевидно, что существование максимума или минимума для функции (20) равносильно существованию максимума или минимума для функции f_m, согласно условиям $f_1 = f_2 = \ldots = f_{m-1} = 0$. Таким образом, мы видим, как из существования такого условного максимума или минимума необходимо следует, что система уравнений (14) способна определить в действительной области число неизвестных, большее числа самих уравнений.

Отсюда имеем непосредственную иллюстрацию случая системы с n узлами и n стержнями, рассмотренной в конце п. 14. Она вообще может принимать бесконечность конфигураций, множество которых начинается с $n = 4$ и растет вместе с n; но для какого-нибудь $n \geqslant 4$ система будет неизменяемой, когда длина

$$l_n = \sqrt{(x_n - x_1)^2 + (y_n - y_1)^2}$$

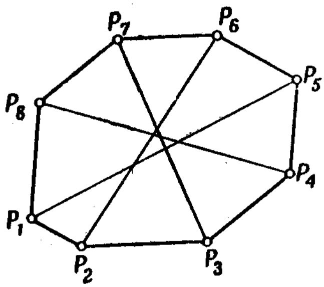
стержня $P_1 P_n$ достигает своего максимума, совместного с условиями

$$l_i = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

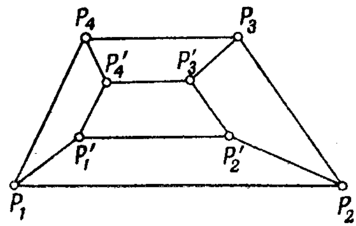
где l_i означают $n-1$ заданных чисел.

17. Другие более наглядные примеры особых неизменяемых ферм [т. е. ферм, не удовлетворяющих условию (13)] были найдены Е. Кёттером (E. Kötter) [1]). Основные указанные им типы получаются на основании следующих соображений.

а) Рассмотрим многоугольник $P_1P_2 \ldots P_{2k}$ (фиг. 50) с $2k$ сторонами и с соответствующими диагоналями P_iP_{k+i} $(i=1, 2, \ldots, k)$. Так как $n=2k$ и $m=3k$ и, следовательно, $2n-3-m=k-3$, то в общем случае, как только будет $k>3$, т. е. начиная с восьмиугольника, мы будем иметь неопределенность, соответствующую



Фиг. 50.



Фиг. 51.

$k-3$ произвольным параметрам; но если каждая сторона параллельна своей противоположной, то ферма будет для какого угодно $k>3$ фермой без лишних стержней.

б) Пусть в двух многоугольниках $P_1P_2 \ldots P_k$ и $P'_1P'_2 \ldots P'_k$ (фиг. 51) с одним и тем же числом k сторон вершины с одинаковыми индексами соединены стержнями. Так же как и в предыдущем случае, мы будем иметь $3k$ стержней и $2k$ узлов, так что в общем случае система при $k>3$ будет неопределенной кратности $(k-3)$; но если, например, многоугольник $P'_1P'_2 \ldots P'_k$ будет внутренним для другого и, кроме того, будет иметь стороны, параллельные сторонам многоугольника $P_1P_2 \ldots P_k$ и соответственно меньшие этих сторон, то ферма будет неизменяемой.

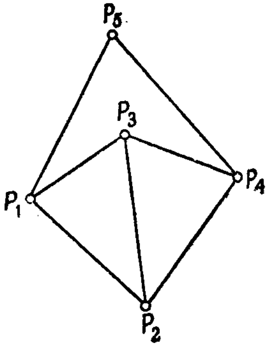
18. Замечательный класс стержневых систем, для которых непосредственно очевидно, что они неизменяемы и не имеют лишних стержней, получается при помощи следующего построения: пусть мы имеем три узла P_1, P_2, P_3 (фиг. 52), соединенные попарно стержнями, и пусть всякий другой узел определяется посредством двух стержней, выходящих из двух вершин этого треугольника или из двух каких угодно узлов, которые таким образом последовательно получаются (включая и первые три). На фиг. 52

---

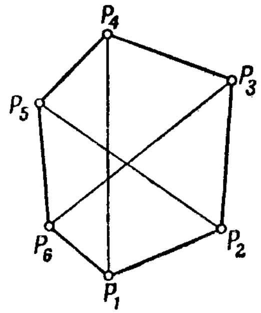
[1]) *Festschrift Heinrich Müller — Breslau*; Лейпциг, 1912, стр. 61.

точка P_4 соединена с P_2 и P_3, в то время как точка P_5 соединяется с P_1 и P_4.

Полезно отметить, что эта структура не является наиболее общей структурой неизменяемых ферм без лишних стержней; это следует уже из существования особых ферм, которые мы рассматривали в предыдущем пункте, но даже оставляя в стороне особые фермы и ограничиваясь стержневыми системами, удовлетворяющими условию (13), т. е. системами, имеющими n узлов и $2n-3$ стержней,



Фиг. 52.



Фиг. 53.

мы легко обнаружим неизменяемость и отсутствие лишних стержней в ферме (фиг. 53 — шестиугольник с тремя диагоналями), которая не является фермой указанной выше структуры.

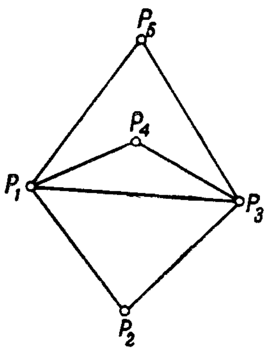
Систематическое изучение различных типов (неособых) неизменяемых стержневых систем без лишних стержней было недавно предпринято Х. Поллячек-Гейрингер [1]), которая пришла к заключению, что, для того чтобы ферма была неизменяемой и не имела лишних стержней, необходимо и достаточно, чтобы никакая из содержащихся в ней стержневых систем не имела лишних стержней.

19. Вернемся опять к стержневым системам, структура которых определена построением предыдущего пункта. Между ними заслуживают особого внимания так называемые *треугольные системы*, которые внутри рассматриваемого класса ферм будут определяться условием, что два узла, определяющие новый узел посредством двух выходящих из них стержней, сами соединены одним стержнем. Такова ферма, изображенная на фиг. 54, между тем как ферма на фиг. 52 не будет принадлежать рассматриваемому типу, так как в ней узел P_5 соединен с узлами P_1 и P_4, не соединенными между собой одним стержнем. Причина названия таких ферм треугольными очевидна: рассматриваемые фермы таковы, что каждый стержень является стороной, по крайней мере, одного треугольника.

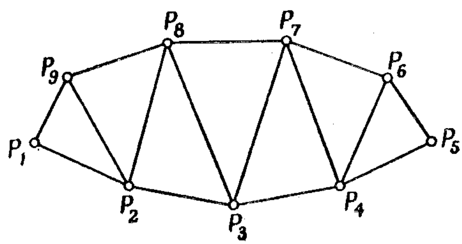
[1]) *Zeitschrift für ang. Math. u. Mech.*, т. 7 (1927), стр. 58, 72.

Дальнейшее разделение приводит к *простым треугольным фермам.* Этим именем называют треугольные системы, в которых треугольники следуют в таком порядке, что первый треугольник имеет общий стержень только со вторым треугольником, второй имеет два общих стержня с первым и третьим треугольниками, третий — с вторым и четвертым, и т. д., предпоследний — с последним. Как видно из фиг. 55, контур фермы составлен из стержней, каждый из которых принадлежит только одному треугольнику; эти стержни называются *внешними*. Остальные стержни, каждый из которых является общим для двух, и только для двух, треугольников, называются *внутренними* (или также, когда ферма расположена в вертикальной плоскости, укосинами, если они наклонны, и стойками, если вертикальны).

В этих простых треугольных системах все узлы лежат на контуре; между ними будут два, и только два узла (на фиг. 55 P_1, P_5), в которых сходятся только два стержня, тогда как в каждом из остальных сходятся три или четыре стержня. Этими двумя *конце-*



Фиг. 54.



Фиг. 55.

выми узлами контур делится на две ломаные линии (на фиг. 55 $P_1P_2P_3P_4P_5$ и $P_1P_9P_8P_7P_6P_5$), которые, когда ферма находится в своем типичном положении в вертикальной плоскости, с концами на одинаковой высоте, удобно назвать *нижним* и соответственно *верхним поясами.* Если число узлов есть n, то составляющих ферму треугольников будет $n-2$ и, смотря по тому, будет ли n четным или нечетным, нижний и верхний пояса или будут иметь одно и то же число стержней, или один из них будет иметь одним стержнем меньше другого.

Если P_1 есть один из двух концевых узлов и полное число узлов четно и равно $2k$, то другим концевым узлом будет P_{k+1}. Если же, наоборот, число узлов нечетно и равно $2k+1$, то вторым концевым узлом будет или P_{k+1}, или P_{k+2}, в зависимости от того, идем ли мы при нумеровании узлов, начиная с P_1, сначала по поясу, имеющему одним узлом меньше, или же по другому поясу.