

### § 4. Равновесие неизменяемой системы без лишних стержней под действием чисто узловых сил

**20.** Векторное определение усилий. Начнем с рассмотрения какой угодно неизменяемой системы без лишних стержней (неособой),  $n$  узлов которой пусть будут  $P_1, P_2, \dots, P_n$ , и, как в § 2, обозначим через  $F_1, F_2, \dots, F_n$  соответствующие внешние, прямо приложенные силы, предполагая, что все они лежат в плоскости системы. Конфигурация системы здесь задана, а в конкретных задачах следует считать известными также и положения отдельных узлов, так что речь будет идти об определении усилий, которым под действием указанной системы внешних сил подвергается каждый отдельно взятый стержень. После того как будут найдены усилия, действующие на стержни, на основании принципа равенства действия и противодействия можно также определить и силы, действующие на узлы.

Обобщая символы, принятые в п. 5 для просто связанных систем, мы будем обозначать усилия, которые испытывает любой стержень  $P_i P_j$  со стороны соответствующих узлов  $P_i$  и  $P_j$ , через  $\Phi_{j,i}$  и  $\Phi_{i,j}$ , так что при равновесии будем иметь

$$\Phi_{i,j} = -\Phi_{j,i}. \quad (21)$$

Как уже было указано несколько ранее, линии действия этих усилий известны по заданию, так что неизвестными остаются величины усилий и стороны, в которые они направлены. Вследствие соотношений (21) число этих неизвестных равно числу стержней фермы, т. е.  $2n - 3$ , и, так как соотношения (21) исчерпывают условия равновесия стержней, определение этих неизвестных можно получить только из условий равновесия узлов.

Если в каком-нибудь узле  $P_i$  сходятся стержни  $P_i P_j, P_i P_l, \dots$ , то усилия, которые этот узел испытывает со стороны стержней, могут быть представлены в виде  $-\Phi_{j,i}, -\Phi_{l,i}, \dots$ , или, на основании соотношений (21), в виде  $\Phi_{i,j}, \Phi_{i,l}, \dots$ , (все с первым индексом  $i$ ) и соответствующее условие равновесия приведет к виду

$$F_i + \Phi_{i,j} + \Phi_{i,l} + \dots = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (22)$$

Так как речь идет о плоской задаче, то эти  $n$  векторных уравнений перейдут в  $2n$  скалярных уравнений; но легко видеть, что если задача разрешима, то число их уменьшится. Действительно, заметим, что здесь, как и в случае просто связанной системы (п. 6), каждое из векторных уравнений (21), (22), поскольку это относится к приложенным векторам с линиями действия, пересекающимися в одной и той же точке, можно истолковать не только как простое векторное равенство (эквивалентность), но и как векторную эквивалентность в собственном смысле; поэтому, складывая по частям уравнения (22) и принимая во внимание, что

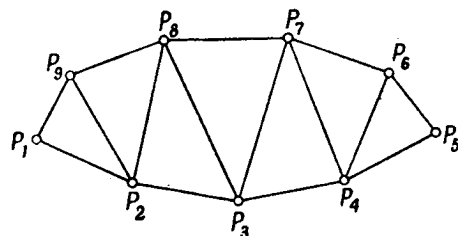
в сумме, вместе с каждым усилием  $\Phi_{i,j}$ , появляется один, и только один, раз соответствующее усилие  $\Phi_{j,i}$ , относящееся к другому концу того же самого стержня, на основании соотношений (21) заключаем, что система внешних сил  $F_1, F_2, \dots, F_n$  является уравновешенной. Другими словами, равенства (21), (22) содержат в себе основные уравнения равновесия, не зависящие от усилий (внутренних), и, так как эти уравнения относятся к плоской системе сил, они сводятся к трем скалярным уравнениям, которые должны удовлетворяться данными задачи, как условия ее разрешимости.

Согласно этому, скалярные уравнения, являющиеся следствиями уравнений (22), сводятся к  $2n - 3$  уравнениям, т. е. мы имеем как раз столько уравнений, сколько имеется неизвестных; очевидно при этом, что речь идет о линейных неоднородных уравнениях.

Чтобы быть уверенным, что эти  $2n - 3$  уравнений вполне определяют неизвестные задачи, следовало бы убедиться в том, что они независимы. К этому мы еще вернемся в § 8 гл. XV, рассматривая снова ту же задачу на основе принципа виртуальных работ; здесь же мы ограничимся лишь утверждением, что уравнения (22) действительно единственным образом определяют неизвестные всякий раз, как будет отличен от нуля якобиан  $J$ , о котором мы говорили в п. 14, т. е. когда будет удовлетворяться условие, что ферма (неособая) не имеет лишних стержней.

Намеченный здесь способ вычисления представляет собой *аналитический метод для определения усилий*. Как мы видели, он состоит в решении  $2n - 3$  линейных неоднородных уравнений с таким же числом неизвестных, поэтому необходимо выбрать такой метод решения этих уравнений, чтобы по возможности уменьшить сложность вычислений.

**21. Графическое определение усилий.** На практике обычно прибегают к более прямым способам, преимущественно графическим, кото-



Фиг. 56.

рые приводят или к изолированному определению некоторых усилий, независимо от других, или же к представлению всех усилий в одной диаграмме, позволяющей проверять результаты, к которым мы последовательно приходим. Эти методы применяются к неизменяемым системам любого типа; однако здесь мы, для боль-

шей ясности и чтобы не слишком отклоняться в сторону, ограничимся простыми треугольными системами (п. 19).

Обратимся, например, к ферме  $P_1P_2 \dots P_9$ , представленной на фиг. 55 п. 19, которую мы здесь воспроизводим (фиг. 56). Рас-

смаатривая один из двух крайних треугольников, например треугольник  $P_1P_2P_9$ , мы видим, что в первом узле сходятся только два стержня  $P_2P_1$ ,  $P_9P_1$ , так что уравнение равновесия точки  $P_1$

$$F_1 + \Phi_{1,2} + \Phi_{1,9} = 0$$

единственным образом определяет усилия  $\Phi_{1,2}$  и  $\Phi_{1,9}$  как равные составляющим силы  $-F_1$  соответственно по прямым  $P_1P_2$ ,  $P_1P_9$ .

Рассмаатривая второй треугольник  $P_2P_8P_9$ , мы видим, что в одном из узлов, именно в узле  $P_9$ , сходятся три стержня, тогда как в каждом из двух других узлов сходятся по четыре стержня. Уравнение равновесия, соответствующее первому узлу,

$$F_9 + \Phi_{9,1} + \Phi_{9,2} + \Phi_{9,8} = 0$$

определяет  $\Phi_{9,2}$  и  $\Phi_{9,8}$  как составляющие силы  $-F_9 + \Phi_{9,1}$  по соответствующим стержням, поскольку сила  $\Phi_{9,1}$  является уже определенной, как противоположная силе  $\Phi_{1,9}$ . После этого можно переходить к узлу  $P_2$ , в котором из четырех сил уже известны  $\Phi_{2,1}$  и  $\Phi_{2,9}$ , тогда как силы  $\Phi_{2,3}$ ,  $\Phi_{2,8}$  определяются соответствующим уравнением равновесия

$$F_2 + \Phi_{2,1} + \Phi_{2,9} + \Phi_{2,3} + \Phi_{2,8} = 0,$$

как составляющие по соответствующим стержням вектора

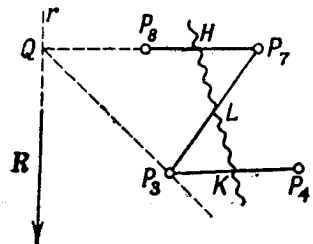
$$-F_2 - \Phi_{2,1} - \Phi_{2,9}.$$

Так можно продолжать до тех пор, пока не будут определены все усилия. Определение неизвестных усилий будет закончено, когда, дойдя до последнего треугольника  $P_4P_5P_6$ , мы рассмотрим две его вершины  $P_4$  и  $P_6$ ; после этого мы можем проверить точность полученных результатов, обращаясь к уравнению равновесия крайнего узла  $P_6$ , т. е. проверяя, действительно ли будут полученные для  $\Phi_{5,4}$ ,  $\Phi_{5,6}$  векторные значения (как это требуется этим уравнением) прямо противоположны составляющим силы  $F_6$  по стержням  $P_5P_4$ ,  $P_5P_6$ .

### 22. Метод сечений или метод Кульмана.

Обратимся к ферме, составленной из треугольников (см. фиг. 56), и рассмотрим два последовательных треугольника, имеющих общий стержень, например треугольника  $P_3P_7P_8$ ,  $P_7P_3P_4$ .

Представим себе, что ферма разбита на две части  $S_1$  и  $S_2$  посредством сечения, проходящего соответственно через три точки  $H$ ,  $K$ ,  $L$  (фиг. 57) внутренние для стержней контура  $P_7P_8$ ,  $P_3P_4$  и стержня  $P_3P_7$ .



Фиг. 57.

Рассмотрим условия равновесия одной из двух частей фермы, например части  $S_1$ , содержащей первый узел  $P_1$  (т. е. левой части).

Внешними силами, действующими на  $S_1$ , являются, кроме сил, прямо приложенных к узлам части  $S_1$ , усилия  $(H, \Phi_H)$ ,  $(K, \Phi_K)$ ,  $(L, \Phi_L)$ , с которыми части  $HP_7$ ,  $KP_4$  и  $LP_7$  стержней  $P_8P_7$ ,  $P_3P_4$  и  $P_3P_7$  действуют соответственно на части  $P_8H$ ,  $P_3K$  и  $P_3L$  тех же стержней. Эти усилия тождественны с усилиями  $\Phi_{8,7}$ ,  $\Phi_{3,4}$ ,  $\Phi_{3,7}$ , которым стержни  $P_8P_7$ ,  $P_3P_4$  и  $P_3P_7$  подвергаются в соответствующих узлах  $P_7$ ,  $P_4$ ,  $P_7$ , и так как необходимо, чтобы были удовлетворены основные условия равновесия, то три усилия  $(H, \Phi_H)$ ,  $(K, \Phi_K)$ ,  $(L, \Phi_L)$  должны уравновешивать систему сил, приложенных в узлах части  $S_1$ , т. е. в нашем случае сил  $(P_1, F_1)$ ,  $(P_2, F_2)$ ,  $(P_3, F_3)$ ,  $(P_8, F_8)$ ,  $(P_9, \Phi_9)$ . Такая система, все силы которой лежат в одной плоскости, эквивалентна или одной силе, или одной паре (гл. I, п. 50); в практически важных случаях речь идет обыкновенно об одной силе  $R$ , линию действия  $r$  которой можно построить (применяя, например, графический метод, указанный в упражнении 21 гл. I). При таком предположении речь идет об определении величин и сторон обращения трех векторов  $\Phi_H$ ,  $\Phi_K$ ,  $\Phi_L$  таким образом, чтобы система

$$(H, \Phi_H), (K, \Phi_K), (L, \Phi_L), (R \text{ на } r)$$

была уравновешена; легко убедиться, что эта задача всегда допускает единственное решение.

Действительно, прямая  $r$  необходимо пересекает, по крайней мере, одну из линий действия трех известных усилий. Если, например, она пересекает прямую  $P_8P_7$  в точке  $Q$ , то мы можем считать результирующую активных сил  $R$  и усилие  $\Phi_H$  приложенными в этой точке, а усилия  $\Phi_K$  и  $\Phi_L$  в узле  $P_3$ ; и так как, если мы временно обозначим через  $\Psi$  результирующую этих двух последних усилий, тоже приложенную в  $P_3$ , мы должны иметь

$$(Q, R + \Phi_H) \text{ эквивалентной } (P_3, \Psi),$$

то линией действия силы  $\Psi$  может быть только прямая  $P_3Q$ ; поэтому силы  $\Phi_H$ ,  $\Psi$  можно определить как составляющие силы  $-R$  по прямым  $QP_8$  и  $QP_3$ . Найдя  $\Psi$ , достаточно будет разложить ее по двум прямым  $P_3P_4$ ,  $P_3P_7$ , чтобы иметь усилия  $\Phi_K$  и  $\Phi_L$ .

**23. Метод моментов или метод Риттера.** Этот метод, по существу, является прямым следствием метода сечений, но по сравнению с последним обладает преимуществом большей быстроты и точности построений.

Возьмем снова пример из предыдущего пункта и введенные там обозначения. Принимая во внимание то обстоятельство, что

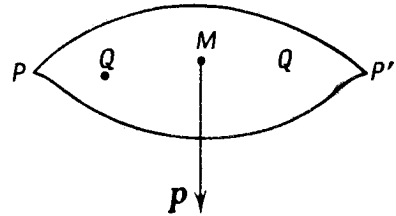
четыре приложенных вектора

$$(H, \Phi_H), (K, \Phi_K), (L, \Phi_L), (R \text{ на } r)$$

составляют уравновешенную систему, и имея в виду определить одно из неизвестных усилий, например  $\Phi_H$ , возьмем за центр приведения узел  $P_3$ , общий для двух других стержней, и заметим, что, так как моменты сил  $(K, \Phi_K)$  и  $(L, \Phi_L)$  относительно точки  $P_3$  равны нулю, момент силы  $(H, \Phi_H)$  должен быть равен моменту силы  $R$ . Так как эти два приложенных вектора лежат в одной и той же плоскости, то равенство моментов сводится к единственному скалярному уравнению, т. е. к равенству их проекций на произвольно ориентированную нормаль к плоскости. В конечном счете речь идет о равенстве так называемых *статических моментов*, т. е. произведений из величин сил  $\Phi_H$  и  $R$  на соответствующие плечи относительно точки  $P_3$ , причем каждый момент берется со знаком плюс или минус, в зависимости от того, положительна или отрицательна проекция соответствующего вектора-момента на ориентированную нормаль. Тем самым вектор  $\Phi_H$ , имея линией действия прямую  $P_3P_7$ , будет определен по величине, направлению и стороне.

24. Лемма. Для того чтобы сократить рассуждения, которые мы намерены изложить в ближайшем пункте, предположим одно общее замечание.

Рассмотрим какую-нибудь неизменяемую плоскую вертикальную систему, опертую (горизонтально и без трения) в двух точках  $P$  и  $P'$ , расположенных на одинаковой высоте (фиг. 58); пусть система находится под действием веса или нагрузки  $p$ , приложенной в одной из ее точек  $M$ , внутренней для полосы, заключенной между вертикалями, проходящими через точки  $P$  и  $P'$ .



Фиг. 58.

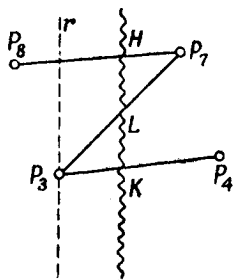
Если система находится в равновесии, то реакции опор  $\Phi$  и  $\Phi'$  в точках  $P$  и  $P'$  будут вертикальны и направлены вверх. Можно показать, что, как бы мы ни изменяли положение точки  $Q$  внутри указанной полосы, результирующий момент относительно  $Q$  тех из трех внешних сил  $\Phi, \Phi', p$ , которые находятся слева (или справа) от  $Q$ , расположенный перпендикулярно к плоскости фермы, направлен всегда в одну и ту же сторону, а именно: от наблюдателя (или соответственно к наблюдателю); соответствующий статический момент будет отрицателен (или соответственно положителен). Это, очевидно, справедливо до тех пор, пока точка  $Q$  остается слева от вертикали, проходящей через точку  $M$ , потому что в этом

случае мы имеем только момент реакции ( $P, \Phi$ ). Далее, если точка  $Q$  переходит направо от вертикали через точку  $M$ , то необходимо принимать во внимание также и нагрузку ( $M, p$ ); но так как в силу второго основного условия равновесия результирующий момент сил ( $P, \Phi$ ) и ( $M, p$ ) должен быть противоположен моменту сил ( $P', \Phi$ ), который является правым, утверждение все еще остается справедливым. Из этого замечания, как непосредственное следствие, вытекает, что если неизменяемая плоская вертикальная система, опертая в точках  $P$  и  $P'$ , подвергается действиям какого угодно числа нагрузок, приложенных в таком же числе точек, внутренних для полосы, заключенной между вертикалями, проходящими через точки  $P$  и  $P'$ , и внутри этой полосы берется какой-нибудь центр приведения, то соответствующий результирующий момент тех из внешних сил (нагрузки и реакции опор), которые находятся, относительно наблюдателя, слева (или справа) от вертикали через точку  $Q$ , окажется для этого наблюдателя левым (или соответственно правым), каково бы ни было положение точки  $Q$ .

В этом можно убедиться, рассматривая последовательно, помимо надлежащей реакции опоры, отдельные нагрузки и повторно применяя сделанное выше замечание.

**25.** Плоская вертикальная ферма, опертая на концах и нагруженная только в узлах. Этот случай системы сил типичен и важен для стержневых систем вообще и в частности для ферм, составленных из треугольников.

Для этого вида ферм, в указанных выше условиях действия сил, замечание предыдущего пункта позволяет установить общее правило для определения усилий в отдельных стержнях контура фермы в состоянии равновесия.



Фиг. 59.

Обращаясь, для определенности, к ферме из пп. 21—23, рассмотрим в ней один из стержней верхнего контура, например стержень  $P_8P_7$  (фиг. 59). Для того чтобы видеть, как он работает, применим метод Риттера, проведя сечение, как и в п. 23, через точки  $H, K, L$  стержней  $P_7P_8, P_3P_4, P_3P_7$ .

Обозначив через  $S_1$  часть фермы слева от сечения и приняв за центр приведения узел  $P_3$ , в котором сходятся два стержня  $P_7P_3$  и  $P_4P_3$ , сосредоточим внимание на тех внешних силах, действующих на  $S_1$ , которые находятся слева от вертикали  $r$ , проходящей через точку  $P_3$ . В силу леммы предыдущего пункта их результирующий момент относительно нормали к плоскости фермы, проходящей через точку  $P_3$  и направленной к читателю, будет отри-

пательным. Если, как на фиг. 59, узел  $P_8$  и, следовательно, нагрузка на этот узел находятся слева от  $r$ , то достаточно вспомнить, что часть фермы  $S_1$  находится в равновесии под действием указанных внешних сил, приложенных слева от  $r$ , силы, приложенной к узлу  $P_3$ , и трех усилий  $(H, \Phi_H)$ ,  $(K, \Phi_K)$ ,  $(L, \Phi_L)$ , из которых два последних имеют относительно  $P_3$  момент, равный нулю, чтобы заключить, что статический момент силы  $(H, \Phi_H)$  относительно того же центра приведения положителен, или, другими словами, стержень  $P_3P_7$  подвергается сжатию. К тому же самому заключению мы придем, если узел  $P_8$  и соответствующая нагрузка находятся справа от  $r$ , потому что в этом случае статический момент этой нагрузки относительно точки  $P_3$  так же, как и результирующий момент внешних сил, лежащих слева от  $r$ , отрицателен.

Подобным же образом (принимая за центр приведения узел  $P_7$  и рассматривая внешние силы, действующие на часть  $S_2$  системы и расположенные справа от вертикали, проходящей через точку  $P_7$ ) мы увидим, что любой стержень  $P_3P_4$  нижнего пояса подвергается растяжению.

Поэтому имеем следующее важное предложение.

*Если на простую треугольную ферму, опертую на концах, внешние силы действуют только в узлах, то каждый стержень верхнего пояса подвергается сжатию (или работает на сжатие), а каждый стержень нижнего пояса подвергается растяжению (или работает на растяжение).*

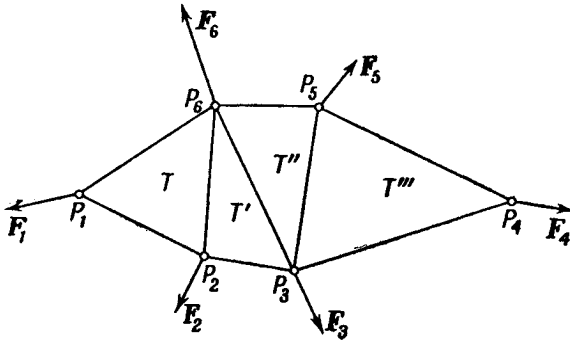
**26.** Силовой многоугольник, относящийся к заданной ферме. Мы ограничимся здесь случаем простой треугольной фермы; заметим только, что с соответствующими изменениями аналогичные рассуждения можно было бы применить и к фермам более сложной структуры, какие иногда встречаются в технических задачах.

Для простоты мы обратимся к случаю, представленному на фиг. 60, где дана ферма, состоящая из четырех треугольников; далее мы увидим, что число треугольников не оказывает никакого влияния на тип конструкции и на рассуждения.

Пронумеруем узлы с 1 до 6, начиная с одного из двух крайних узлов (в которых сходятся только по два стержня) и обходя ферму против часовой стрелки; обозначим четыре треугольника, начиная с первого, через  $T, T', T'', T'''$ . На фиг. 60 представлены также внешние силы  $F_1, F_2, \dots, F_6$ , приложенные соответственно к узлам  $P_1, P_2, \dots, P_6$ . Построенную таким образом диаграмму можно назвать, обобщая название, которым мы пользовались в случае просто связанных систем, *веревочным многоугольником* (п. 5).

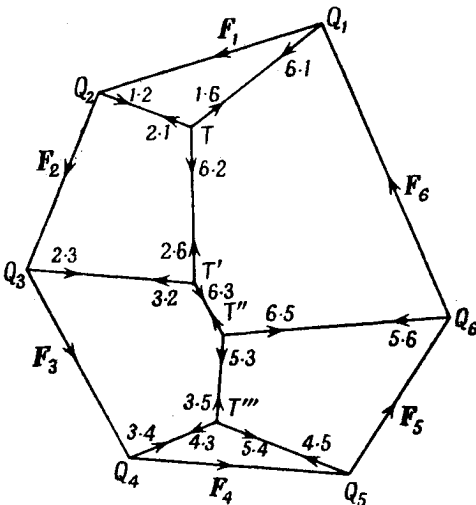
Покажем, как и в этом случае, в дополнение к веревочному многоугольнику (или диаграмме „а“ Кремона), можно построить

силовой многоугольник (или диаграмму „б“ Кремона), который представляет внешние силы  $F$  вместе с усилиями  $\Phi$ , действующими на отдельные стержни фермы.



Фиг. 60.

Для этой цели построим, начиная от какой-нибудь точки  $Q_1$ , многоугольник  $Q_1Q_2 \dots Q_6$  (фиг. 61) приложенных сил  $F_1, F_2, \dots, F_6$ , который, если речь идет об уравновешенной системе сил, необходимо будет замкнутым, и затем обратимся к одному из двух крайних узлов, например к узлу  $P_1$ <sup>1)</sup>.



Фиг. 61.

Для равновесия точки  $P_1$  необходимо, чтобы сила  $F_1$  уравнивалась двумя усилиями  $\Phi_{1,2}, \Phi_{1,6}$ , действующими на узел  $P_1$  вдоль стержней, сходящихся в  $P_1$ . Если через точки  $Q_1, Q_2$  проведем две прямые, соответственно параллельные двум (пересекающимся) прямым  $P_1P_6, P_1P_2$ , то на основании  $Q_1Q_2$  получится треугольник, две другие стороны которого и представляют по величине и направлению соответствующие усилия.

Для того чтобы видеть, в какую сторону они направлены, достаточно обойти контур треугольника, начиная обход с силы  $F_1$ ,

<sup>1)</sup> На фиг. 61 для ясности многоугольник  $Q_1Q_2 \dots Q_6$  приложенных сил увеличен в три раза по сравнению с предыдущей диаграммой „а“.



в направлении этой силы. Обозначим третью вершину треугольника той же самой буквой  $T$ , которой мы обозначили первый треугольник фермы. Мы скоро увидим, какое теоретическое значение имеет это соглашение. Тогда усилия  $\Phi_{1,3}$ ,  $\Phi_{1,6}$  будут представлены по величине, направлению и стороне соответственно отрезками  $Q_2T$ ,  $TQ_1$ . Заметим, что на фиг. 61 каждое из этих усилий (так же как и усилия, которые далее будут последовательно определяться) удобно обозначить соответствующей парой индексов, взятых в надлежащем порядке, вместе со стрелкой, указывающей надлежащую сторону.

После этого перейдем к рассмотрению того из двух узлов, смежных с узлом  $P_1$ , в котором сходятся только три стержня (а не четыре), т. е., в нашем случае, узла  $P_2$  (а не  $P_6$ ). Из четырех сил, действующих на  $P_2$  (и уравновешивающихся между собой), уже известны сила  $F_2$  как заданная (и представленная отрезком  $Q_2Q_3$ ) и усилие  $\Phi_{2,1}$  как противоположное усилию  $\Phi_{1,2}$  (и поэтому представленное отрезком  $TQ_2$ ); для двух других усилий  $\Phi_{2,3}$ ,  $\Phi_{2,6}$  известны только линии действия их  $P_2P_3$ ,  $P_2P_6$ . Поэтому если из точек  $Q_3$  и  $T$  проведем прямые, соответственно параллельные (пересекающимся между собой) прямым  $P_2P_3$ ,  $P_6P_2$ , и обозначим их точку пересечения той же самой буквой  $T''$ , которая обозначает второй треугольник фермы, то на основании условия равновесия узла  $P_2$  заключим, что усилия  $\Phi_{2,3}$ ,  $\Phi_{2,6}$  будут представлены соответственно отрезками  $Q_3T''$  и  $T''T$  не только по величине и направлению, но также и по стороне (сторона каждого из ориентированных отрезков  $Q_3T''$  и  $T''T$  определяется направлением обхода четырехугольника  $Q_2Q_3TT''$ , в предположении, что этот обход начинается со стороны  $Q_2Q_3$  и производится в направлении силы  $F_2$ ).

Надо заметить, что три прямые, выходящие из точки  $T$  диаграммы, которую мы строим, соответственно параллельны трем сторонам треугольника, входящего в состав веревочного многоугольника и обозначенного той же самой буквой  $T$ ; мы сейчас увидим, что такое же соответствие имеется между построенной уже точкой  $T''$  и точками  $T'''$ ,  $T''''$ , которые мы сейчас будем строить, с одной стороны, и треугольниками  $T'$ ,  $T''$ ,  $T'''$  веревочного многоугольника, с другой стороны.

Чтобы продолжить построение, нужно перейти не к узлу  $P_3$ , следующему за  $P_2$  в направлении обхода фермы, а к узлу  $P_6$ . В этом узле сходятся четыре стержня и, следовательно, действуют пять сил, а именно: сила  $F_6$  и четыре усилия  $\Phi_{6,1}$ ,  $\Phi_{6,2}$ ,  $\Phi_{6,3}$ ,  $\Phi_{6,5}$ . Из этих сил известны прямо приложенная сила  $F_6$  как одна из данных сил и усилия  $\Phi_{6,1}$ ,  $\Phi_{6,2}$  как противоположные усилиям  $\Phi_{1,6}$ ,  $\Phi_{2,6}$ . Для двух других усилий указаны линии действия  $P_6P_3$ ,  $P_6P_5$ , так что достаточно провести прямые, параллельные этим двум прямым (пересекающимся между собой), соответственно через  $T''$

и  $Q_6$ , чтобы получить направленные отрезки  $T''T'''$ ,  $T'''Q_6$ , представляющие по величине, направлению и стороне усилия  $\Phi_{6,3}$ ,  $\Phi_{6,5}$ .

Очевидно, что для продолжения построения нужно перейти к узлу  $P_3$ ; достаточно рассмотреть равновесие этого узла (с последующим определением точки  $T'''$ , соответствующей четвертому треугольнику фермы), чтобы закончить построение силового многоугольника; в качестве контроля точности построения может служить то обстоятельство, что ориентированный отрезок  $Q_5T'''$ , представляющий собой усилие  $\Phi_{4,5}$ , должен быть параллелен стержню  $P_4P_5$ .

Сравнивая силовой многоугольник или диаграмму „б“, полученную таким образом, с веревочным многоугольником или диаграммой „а“ (ферма с прямо приложенными силами), отметим, что между ними существует следующее соответствие: 1) каждому отрезку одного соответствует в другом параллельный отрезок; 2) отрезкам, сходящимся в одном и том же узле диаграммы „а“ (таких отрезков в рассматриваемом здесь случае простой треугольной фермы будет три, четыре или пять), на диаграмме „б“ соответствует столько же отрезков, образующих многоугольник (соответственно треугольник, четырехугольник или пятиугольник), и, с другой стороны, тройкам сторон треугольников  $T$ ,  $T'$ ,  $T''$  диаграммы „а“ на диаграмме „б“ соответствуют тройки отрезков, сходящихся в соответственных одноименных точках.

Благодаря таким свойствам диаграммы „а“ и „б“ называются *взаимными* между собой; эта *взаимность*, представляющая собой соответствие между двумя плоскими фигурами, которое заключается в том, что отрезкам одной фигуры, сходящимся в одной точке, соответствуют на другой фигуре отрезки, образующие контур замкнутого многоугольника, распространяется и на более сложные случаи диаграмм „а“ и „б“ простых треугольных ферм.

Геометрическое объяснение такого соответствия, как мы увидим в следующем параграфе, следует искать в том, что две фигуры, находящиеся во взаимном соответствии, могут быть получены посредством ортогонального проектирования двух пространственных фигур, находящихся в некотором соответствии между собой.

В заключение заметим, пользуясь словами Кремона<sup>1)</sup>, что, даже когда не следуют изложенным выше правилам построения силового многоугольника фермы\*), задачу можно решить путем графического определения внутренних усилий, но мы уже не будем иметь взаимных диаграмм, а вместо них будут фигуры более сложные и несвязные, где один и тот же отрезок, не находясь на своем

<sup>1)</sup> *Opere matematiche*, т. III, стр. 352.

\*) Более подробные указания, относящиеся к построению диаграммы Кремона, можно найти, например, в книгах: В. Л. Кирпичев, Основания графической статики, Москва, 1933; А. И. Некрасов, Курс теоретической механики, т. 1, Москва, 1945. (*Прим. ред.*)

надлежащем месте, должен быть повторен или удален, чтобы дать место дальнейшим построениям, как это имело место в старом методе построения силового многоугольника для каждого узла конструкции.

### § 5. Нулевая система в качестве посредствующего звена между плоскими взаимными фигурами

27. Некоторые сведения из геометрии. Представим себе, как это обычно делается в проективной геометрии, два совмещенных пространства  $S$  и  $S'$  и, относя их оба к одной и той же системе однородных декартовых координат (или даже, более общим образом, к проективным координатам), обозначим через  $x_k$  ( $k = 0, 1, 2, 3$ ) и  $x'_h$  ( $h = 0, 1, 2, 3$ ) координаты двух любых точек  $P$  и  $P'$ , принадлежащих соответственно к  $S$  и  $S'$ .

Как известно, билинейное соотношение между координатами  $x'_h$  и  $x_k$

$$\sum_{h, k=0}^3 c_{hk} x'_h x_k = 0, \quad (23)$$

в предположении, что соответствующий определитель

$$\begin{vmatrix} c_{00} & c_{01} & c_{02} & c_{03} \\ c_{10} & c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{20} & c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{30} & c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} \quad (24)$$

отличен от нуля, определяет проективное соответствие между точками каждого из двух пространств и плоскостями другого, которое называется *взаимностью* или *корреляцией*. Точке  $P$  с координатами  $x_k$  первого пространства соответствует во втором плоскость  $\pi'$  с однородными плюккеровыми (или, в более общем случае, проективными) координатами  $u'_h$ , определяемыми, по крайней мере, с точностью до произвольного множителя  $\rho$  из равенств

$$\rho u'_h = \sum_{k=0}^3 c_{hk} x_k; \quad (25')$$

таким же образом точке  $P'$  с координатами  $x'_h$  второго пространства соответствует в первом плоскость  $\pi$  с координатами  $u_k$ , определяемыми из формул

$$\rho u_k = \sum_{h=0}^3 c_{hk} x'_h. \quad (25'')$$