надлежащем месте, должен быть повторен или удален, чтобы дать место дальнейшим построениям, как это имело место в старом методе построения силового многоугольника для каждого узла конструкции.

§ 5. Нулевая система в качестве посредствующего звена между плоскими взаимными фигурами

27. Некоторые сведения из геометрии. Представим себе, как это обычно делается в проективной геометрии, два совмещенных пространства S и S' и, относя их оба к одной и той же системе однородных декартовых координат (или даже, более общим образом, к проективным координатам), обозначим через x_k $(k=0, 1, 2, 3)$ и x'_h $(h=0, 1, 2, 3)$ координаты двух любых точек P и P', принадлежащих соответственно к S и S'.

Как известно, билинейное соотношение между координатами x'_h и x_k

$$\sum_{h,\,k=0}^{3} c_{hk} x'_h x_k = 0, \tag{23}$$

в предположении, что соответствующий определитель

$$\begin{vmatrix} c_{00} & c_{01} & c_{02} & c_{03} \\ c_{10} & c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{20} & c_{21} & c_{22} & 1_{23} \\ c_{30} & c_{31} & c_{32} & 3_{33} \end{vmatrix} \tag{24}$$

отличен от нуля, определяет проективное соответствие между точками каждого из двух пространств и плоскостями другого, которое называется *взаимностью* или *корреляцией*. Точке P с координатами x_k первого пространства соответствует во втором плоскость π' с однородными плюккеровыми (или, в более общем случае, проективными) координатами u'_h, определяемыми, по крайней мере, с точностью до произвольного множителя ρ из равенств

$$\rho u'_h = \sum_{k=0}^{3} c_{hk} x_k; \tag{25'}$$

таким же образом точке P' с координатами x'_h второго пространства соответствует в первом плоскость π с координатами u_k, определяемыми из формул

$$\sigma u_k = \sum_{h=0}^{3} c_{hk} x'_h. \tag{25''}$$

Предположим, что билинейное соотношение (23) корреляции является *кососимметрическим*, т. е. что мы имеем

$$\left.\begin{aligned} c_{hh} &= 0 \\ c_{hk}+c_{kh} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &(h=0,\ 1,\ 2,\ 3), \\ &(h,\ k=0,\ 1,\ 2,\ 3;\ h \lessgtr k), \end{aligned} \tag{26}$$

так что соответствующий определитель (24), который мы предположили отличным от нуля, будет тоже кососимметрическим [1]), т. е. будет иметь вид

$$c = \begin{vmatrix} 0 & c_{01} & c_{02} & c_{03} \\ -c_{01} & 0 & c_{12} & c_{13} \\ -c_{02} & -c_{12} & 0 & c_{23} \\ -c_{03} & -c_{13} & -c_{23} & 0 \end{vmatrix} \tag{24'}$$

В таком случае, как известно, корреляция называется *нулевой системой* и будет инволюционной в том смысле, что равенства (25′), (25″), когда в правых частях переменным x_k и x'_h приписываются соответственно равные значения, дают пропорциональные значения для u'_h, u_k.

Выражаясь в геометрической форме, можно сказать, что любой точке, рассматриваемой как в первом, так и во втором пространстве, корреляция относит одну и ту же плоскость.

Поэтому нет необходимости различать оба пространства, и соответствие можно рассматривать как соответствие между точками и плоскостями одного и того же пространства. Следовательно, вместо двух систем уравнений (25′), (25″) можно рассматривать одну систему

$$\rho u_h = \sum_{k=0}^{3} c_{hk} x_k \qquad (h=0,\ 1,\ 2,\ 3). \tag{25}$$

Плоскость π, соответствующая произвольной точке P, называется полярной плоскостью точки P, а точка P называется полюсом плоскости π.

Основное и характеристическое свойство нулевой системы состоит в том, что *всякая точка лежит на своей полярной плоскости*. В самом деле, выражение

$$\sum_{h=0}^{3} u_h x_h = \rho \sum_{h,\,k=0}^{3} c_{hk} x_h x_k$$

обращается тождественно в нуль в силу условий (26).

---

[1]) Известно, что кососимметрические определители четного порядка (но не нечетного порядка) могут быть отличными от нуля и что всякий кососимметрический определитель порядка $2n$, отличный от нуля, равен квадрату однородного выражения n-й степени от элементов (пфаффиан). Так, в случае, рассмотренном в тексте, имеем

$$c = (c_{01}c_{23} + c_{02}c_{31} + c_{03}c_{12})^2.$$

Вследствие линейной (и, следовательно, проективной) природы соответствия, если точка P описывает прямую r, то совокупность соответствующих полярных плоскостей π представляет собой пучок плоскостей; если прямая r' есть ось этого пучка, то, наоборот, каждой точке прямой r' соответствует полярная плоскость, проходящая через прямую r (а именно та, которая из этой точки проектирует прямую r). Две прямые, такие, как r, r' (т. е. обладающие тем свойством, что полярная плоскость любой точки одной из этих прямых проектирует другую прямую), называются *взаимно полярными* между собой или, как мы будем говорить для простоты, *полярными*.

Существуют прямые, полярные самим себе или, как обычно говорят, *автополярные*. Между ∞^2 прямых, проходящих через любую точку P, автополярными будут те, и только те, ∞^1 прямых, которые лежат в полярной плоскости точки P; и наоборот, среди ∞^2 прямых, лежащих в одной плоскости π, автополярными будут те и только те ∞^1 прямых, которые проходят через полюс плоскости π. Таким образом, в пространстве имеется ∞^3 автополярных прямых, составляющих так называемый *линейный комплекс* рассматриваемой нулевой системы.

28. Приведение к каноническому виду уравнений нулевой системы. Для приложений, которые мы имеем в виду, удобно рассматривать x_k как однородные декартовы координаты. А именно, положим

$$x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = 1 : x : y : z \tag{27}$$

и соответственно введем систему плюккеровых координат u, v, w, связанных с x, y, z:

$$u_0 : u_1 : u_2 : u_3 = 1 : u : v : w. \tag{27'}$$

После этого полярную плоскость π любой точки P с координатами (27) можно определить как плоскость, проходящую через P и (так как ее плюккеровы координаты u, v, w пропорциональны u_1, u_2, u_3) перпендикулярную к вектору с проекциями, пропорциональными значениям, которые получаются для u_1, u_2, u_3 из трех последних уравнений (25) в соответствии со значениями (27).

Между определенными таким образом векторами выберем вектор $\boldsymbol{M}$ с проекциями

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= c_{10} + \ * \ + c_{12}y + c_{13}z, \\ M_2 &= c_{20} + c_{21}x + \ * \ + c_{23}z, \\ M_3 &= c_{30} + c_{31}x + c_{32}y + \ * \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

и введем затем два вспомогательных вектора: вектор $\boldsymbol{M}_0$ с проекциями c_{h0} ($h = 1, 2, 3$) и вектор $\boldsymbol{R}$ с проекциями c_{32}, c_{13}, c_{21}, что равносильно равенству $R_h = c_{h+2 \cdot h+1}$, при условии рассматривать как тождественные те индексы, разность которых равна 3. Вследствие этого равенства (28) можно объединить в одно векторное равенство

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{M}_0+\overrightarrow{PO}\times\boldsymbol{R}, \tag{29}$$

которое, если сравнить его с равенством (24) п. 32 гл. I, показывает, что вектор $\boldsymbol{M}$ зависит от точки P так, как если бы он был результирующим моментом системы Σ приложенных векторов, имеющих результирующим вектором $\boldsymbol{R}$ и результирующим моментом относительно начала координат $\boldsymbol{M}_0$.

Это истолкование позволяет без каких-либо вычислений выполнить ту замену координат, которая приводит кососимметрическое уравнение (23) нулевой системы к наиболее простому виду. Прежде всего заметим, что инвариантный трехчлен T систем Σ определяется равенством

$$T=\boldsymbol{M}_0\cdot\boldsymbol{R}=c_{10}c_{32}+c_{20}c_{13}+c_{30}c_{21}=c_{01}c_{23}+c_{02}c_{31}+c_{03}c_{12},$$

т. е. представляет собой пфаффиан, который, по возведении в квадрат, дает определитель (кососимметрический) формы, стоящей в левой части соотношения (23), согласно предположению отличный от нуля.

Поэтому имеем также $T\lessgtr 0$, так что система Σ имеет вполне определенную центральную ось (см. гл. I, п. 36). Мы примем ее за ось z, ориентируя эту ось в сторону вектора $\boldsymbol{R}$. В силу этого будем иметь:

$$R_1=c_{32}=0,\qquad R_2=c_{13}=0,\qquad R_3=c_{21}=R>0,$$
$$M_{0|1}=c_{10}=0,\qquad M_{0|2}=c_{20}=0,\qquad M_{0|3}=c_{30}=\pm M\lessgtr 0.$$

Уравнение (23), если примем во внимание соотношения (27), получит вид

$$\pm M(z-z')+R(xy'-yx')=0$$

или, если положим $\mp\frac{M}{R}=k$,

$$k(z-z')=xy'-yx'. \tag{30}$$

29. Дальнейшие геометрические замечания о нулевой системе. Прежде чем воспользоваться свойствами нулевой системы для целей, которые мы здесь себе поставили, остановимся несколько на иллюстрации этих свойств, основываясь на указанном ранее построении полярной плоскости π любой точки P как плоскости, проходящей через P и перпендикулярной к соответствующему результирующему моменту $\boldsymbol{M}$ заданной системы Σ приложенных векторов. Продолжая обозначать через $\boldsymbol{R}$ результирующий вектор системы, обозначим через $\boldsymbol{M}_0$ результирующий момент относительно нового начала, т. е. (так как за ось z была принята центральная ось) наименьший момент, направленный вместе с $\boldsymbol{R}$ по этой центральной оси.

Для точки P, лежащей на оси, полярная плоскость перпендикулярна к самой оси, т. е. параллельна плоскости $z=0$, которую мы будем называть далее *ортографической плоскостью*. Если, наоборот, точка P лежит вне оси, то момент $\boldsymbol{M}$, как геометрическая сумма вектора $\boldsymbol{M}_0$, параллельного оси z, и вектора $\overrightarrow{PO}\times\boldsymbol{R}$, параллельного ортографической плоскости, не будет ни параллельным, ни перпендикулярным к центральной оси, так что то же самое будет иметь место и по отношению к полярной плоскости π. Если точка P неограниченно удаляется от оси в каком-нибудь одном направлении, то вектор $\overrightarrow{PO}\times\boldsymbol{R}$, возрастая по величине, будет все больше превосходить постоянный вектор $\boldsymbol{M}_0$, так что полярная плоскость будет стремиться расположиться параллельно центральной оси, т. е. перпендикулярно к ортографической плоскости.

Обратно, если задана плоскость π, не параллельная оси, то ее полюс P определится как такая точка, относительно которой момент системы Σ будет перпендикулярен к π. Предоставляем читателю показать, обратившись к равенству (30), что полюс будет таким образом однозначно определен и будет находиться на конечном расстоянии. Построение показывает также, что полюс неограниченно удаляется в определенном направлении, когда плоскость π стремится принять определенное положение, параллельное оси.

Для всякой точки P автополярные прямые можно определить, согласно сказанному в п. 27, как прямые, перпендикулярные к соответствующему моменту $\boldsymbol{M}$, т. е. как такие прямые, проходящие через P, относительно которых (осевой) момент системы Σ будет равен нулю.

Несколько труднее выяснить, каково, с принятой здесь точки зрения, характеристическое свойство взаимно полярных пар прямых r и r'. Для этой цели удобно обратиться к следующему свойству систем приложенных векторов, которое мы уже предлагали доказать в виде упражнения (гл. I, упражнение 13) и которое мы напомним здесь для удобства читателя. Как бы ни была выбрана прямая r, лишь бы она не была параллельна центральной оси данной системы Σ приложенных векторов и не была прямой с нулевым (осевым) моментом, систему Σ можно привести к двум векторам $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v}'$, у первого из которых линией действия является прямая r, а у второго — вполне определенная (соответствующая r) прямая r'. Для доказательства возьмем на прямой r какую-нибудь точку P (на конечном расстоянии) и обозначим через $\boldsymbol{M}$ соответствующий результирующий момент и через π — плоскость, перпендикулярную в точке P к вектору $\boldsymbol{M}$ (т. е. полярную плоскость точки P), которая в силу установленных предположений не будет параллельна центральной оси (потому что точка P находится на конечном расстоянии) и не будет проходить через r (потому что r не является прямой нулевого момента, т. е. автополярной). Если векторы $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{v}'$ являются составляющими силы $\boldsymbol{R}$ по прямой r и соответственно в плоскости π, то вторая составляющая не будет, конечно, равна нулю, так как прямая r не параллельна вектору $\boldsymbol{R}$, и потому в плоскости π всегда будет существовать одна, и только одна, прямая r', такая, что если ее принять за линию действия вектора $\boldsymbol{v}'$, то последний будет иметь моментом относительно точки P вектор $\boldsymbol{M}$. Таким образом, система, состоящая из двух приложенных векторов ($\boldsymbol{v}$ на r) и ($\boldsymbol{v}'$ на r'), будет эквивалентна системе Σ. Не может существовать другой системы ($\boldsymbol{v}$ на r) и ($\boldsymbol{v}_1$ на r_1), тоже эквивалентной Σ, с прямой r_1, отличной от r'; действительно, так как система векторов

$$(\boldsymbol{v} \text{ на } r), \quad (\boldsymbol{v}' \text{ на } r'), \quad (-\boldsymbol{v} \text{ на } r), \quad (-\boldsymbol{v}_1 \text{ на } r_1)$$

должна быть эквивалентна нулю, то два вектора ($\boldsymbol{v}'$ на r'), ($-\boldsymbol{v}_1$ на r_1), взаимно уравновешиваясь, прямо противоположны друг другу.

Теперь легко видеть, что две прямые r и r' будут между собой полярны. Достаточно показать, что как для точки P, так и для всякой другой точки Q прямой r полярная плоскость проходит через r'. Это непосредственно следует из того, что результирующий момент системы векторов ($\boldsymbol{v}$ на r) и ($\boldsymbol{v}'$ на r') относительно точки Q сводится к моменту вектора ($\boldsymbol{v}'$ на r') и поэтому перпендикулярен к плоскости Qr'.

Если прямая r стремится расположиться параллельно центральной оси, то составляющая $\boldsymbol{v}'$ стремится к нулю, так что соответствующее плечо, т. е. расстояние прямой r' от P, стремится к бесконечности; таким образом, поляра прямой, параллельной центральной оси, является несобственной прямой.

Заметим, наконец, что если две полярные прямые r и r' (собственные и потому обе непараллельные оси) спроектировать ортогонально на ортографическую плоскость, то получатся две параллельные прямые. Действительно, плоскость, проектирующая какую-нибудь одну из них, поскольку она параллельна оси, имеет в качестве полюса несобственную точку другой прямой. Поэтому каждая из двух прямых r и r' параллельна плоскости, проектирующей ортогонально другую прямую на ортографическую плоскость, что и доказывает высказанное выше утверждение.

30. Пространственное построение плоских взаимных фигур. После этого геометрического отступления обратимся к нашей задаче. Рассмотрим в пространстве многогранник $\mathfrak{F}$ (который может быть и открытым) и соответствующий ему полярный многогранник $\mathfrak{F}'$ относительно любой нулевой системы (30). Обе фигуры будут находиться между собой в таком соответствии, что каждой вершине, грани или ребру одной фугуры будет отвечать на другой соответственно грань, вершина или ребро.

Если многогранники $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}'$ спроектировать ортогонально на ортографическую плоскость, то получатся две фигуры F и F', взаимные в смысле, указанном в п. 26.

Действительно, сторонам, сходящимся в вершине одной фигуры, соответствуют в другой фигуре стороны, составляющие периметр многоугольника; кроме того, на основании последнего замечания предыдущего пункта будет выполняться условие, заключающееся в том, что соответственные стороны на обеих фигурах параллельны.

Важно отметить, что если один из двух многогранников, из которых мы исходили, например многогранник $\mathfrak{F}'$, открытый и имеет контуром пространственный многоугольник, то фигура F' содержит в качестве проекции этого контура замкнутый многоугольник, но сторонам его отвечают на фигуре F столько же отрезков, которые, будучи параллельны соответственным сторонам многоугольника на фигуре F', не сходятся в одной и той же точке, потому что многоугольник фигуры F' в данном случае не получен в результате проектирования плоского многоугольника.

Это обстоятельство имеет место, в частности, для диаграммы „б“ фермы. Сторонам (замкнутого) силового многоугольника соответствуют на диаграмме „а“ внешние, прямо приложенные к узлам, силы, которые параллельны соответственным сторонам силового многоугольника, но, вообще говоря, не сходятся в одной и той же точке.

§ 6. Приложение к фермам

31. Чтобы видеть, какое применение находят предыдущие соображения в случае ферм, обратимся к простым треугольным фермам.

Как и в случае фиг. 60 (соответствующем предположению $n = 6$), обозначим, начиная от крайнего узла, через $P_1, P_2, \ldots, P_n$ узлы произвольной простой треугольной фермы, взятые в одном из двух возможных порядков их следования на контуре. Предполагается, что к узлам фермы приложены внешние силы $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \ldots, \boldsymbol{F}_n$ и система находится в равновесии.

Обозначим через $M_2, M_3, \ldots, M_n, M_1$ точки пересечения линий действия сил $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$, $\boldsymbol{F}_2$ и $\boldsymbol{F}_3, \ldots, \boldsymbol{F}_{n-1}$ и $\boldsymbol{F}_n$, $\boldsymbol{F}_n$ и $\boldsymbol{F}_1$ и рассмотрим сначала общий случай, когда линии действия сил, приложенных к двум последовательным узлам, непараллельны.

Отвлечемся временно от величины этих сил и представим себе, что к ферме присоединены треугольники $P_1P_2M_1$, $P_2P_3M_2, \ldots$ $\ldots, P_nP_1M_n$; полученную таким образом диаграмму F, которая все еще состоит исключительно из треугольников (но не может уже называться простой), назовем *веревочным многоугольником*. При этом нужно обратить внимание на то, что на линии действия каждой силы, например на линии действия силы $\boldsymbol{F}_i$, найдутся две такие