Если многогранники $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}'$ спроектировать ортогонально на ортографическую плоскость, то получатся две фигуры F и F', взаимные в смысле, указанном в п. 26.

Действительно, сторонам, сходящимся в вершине одной фигуры, соответствуют в другой фигуре стороны, составляющие периметр многоугольника; кроме того, на основании последнего замечания предыдущего пункта будет выполняться условие, заключающееся в том, что соответственные стороны на обеих фигурах параллельны.

Важно отметить, что если один из двух многогранников, из которых мы исходили, например многогранник $\mathfrak{F}'$, открытый и имеет контуром пространственный многоугольник, то фигура F' содержит в качестве проекции этого контура замкнутый многоугольник, но сторонам его отвечают на фигуре F столько же отрезков, которые, будучи параллельны соответственным сторонам многоугольника на фигуре F', не сходятся в одной и той же точке, потому что многоугольник фигуры F' в данном случае не получен в результате проектирования плоского многоугольника.

Это обстоятельство имеет место, в частности, для диаграммы „б" фермы. Сторонам (замкнутого) силового многоугольника соответствуют на диаграмме „а" внешние, прямо приложенные к узлам, силы, которые параллельны соответственным сторонам силового многоугольника, но, вообще говоря, не сходятся в одной и той же точке.

§ 6. Приложение к фермам

31. Чтобы видеть, какое применение находят предыдущие соображения в случае ферм, обратимся к простым треугольным фермам.

Как и в случае фиг. 60 (соответствующем предположению $n = 6$), обозначим, начиная от крайнего узла, через $P_1, P_2, \ldots, P_n$ узлы произвольной простой треугольной фермы, взятые в одном из двух возможных порядков их следования на контуре. Предполагается, что к узлам фермы приложены внешние силы $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \ldots, \boldsymbol{F}_n$ и система находится в равновесии.

Обозначим через $M_2, M_3, \ldots, M_n, M_1$ точки пересечения линий действия сил $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$, $\boldsymbol{F}_2$ и $\boldsymbol{F}_3, \ldots, \boldsymbol{F}_{n-1}$ и $\boldsymbol{F}_n$, $\boldsymbol{F}_n$ и $\boldsymbol{F}_1$ и рассмотрим сначала общий случай, когда линии действия сил, приложенных к двум последовательным узлам, непараллельны.

Отвлечемся временно от величины этих сил и представим себе, что к ферме присоединены треугольники $P_1P_2M_1$, $P_2P_3M_2, \ldots$ $\ldots, P_nP_1M_n$; полученную таким образом диаграмму F, которая все еще состоит исключительно из треугольников (но не может уже называться простой), назовем *веревочным многоугольником*. При этом нужно обратить внимание на то, что на линии действия каждой силы, например на линии действия силы $\boldsymbol{F}_i$, найдутся две такие точки M, а именно: точки пересечения M_i и M_{i+1} с линиями действия сил $\boldsymbol{F}_{i-1}$ и $\boldsymbol{F}_{i+1}$, что каждый узел P_i будет находиться на одной прямой с соответствующими двумя точками M_i и M_{i+1}. Это будет справедливо для всех значений $1, 2, \ldots, n$ индекса i, если мы условимся, что индексы 0 и n, 1 и $n+1$ эквивалентны между собою.

Такой веревочный многоугольник F можно рассматривать бесконечным множеством способов как ортогональную проекцию на плоскость (которую мы примем за ортографическую плоскость $z=0$) многогранника $\mathfrak{F}$ с треугольными гранями. Для этого достаточно принять за вершину многогранника $\mathfrak{F}$, соответствующую каждой отдельно взятой точке M, произвольную точку $\mathfrak{M}$ перпендикуляра в точке M_i к ортографической плоскости. Тогда, так как точка P_i находится на одной прямой с точками M_i и M_{i+1}, если мы хотим сохранить это свойство для соответствующих точек поверхности $\mathfrak{F}$, точка $\mathfrak{P}_i$ должна быть определена в плоскости, проектирующей прямую $\mathfrak{M}_i\, \mathfrak{M}_{i+1}$, как точка пересечения этой прямой с перпендикуляром к ортографической плоскости в P_i. Этот способ нельзя применять только тогда, когда точки M_i и M_{i+1} совпадают; но в этом случае точку $\mathfrak{P}_i$ можно взять произвольно на перпендикуляре к ортографической плоскости, восставленном из P_i.

Таким образом, каждый треугольник веревочного многоугольника (будь то треугольник фермы или один из присоединенных треугольников $P_{i-1}P_iM_i$) является проекцией одной грани (треугольной) многогранника $\mathfrak{F}$. Следует, однако, предупредить, что такое построение не всегда выполнимо, когда речь идет о ферме, имеющей нетреугольное звено; когда это возможно, то необходимо соблюдать некоторую осторожность в выборе вершин многогранника, следя за тем, чтобы вершины, которые проектируются в узлы одного и того же звена, лежали в одной плоскости.

Возвращаясь к фигуре $\mathfrak{F}$, рассмотрим полярную ей фигуру $\mathfrak{F}'$ относительно нулевой системы, имеющей центральную ось, перпендикулярную к ортографической плоскости. Мы знаем, что ортогональная проекция F' фигуры $\mathfrak{F}'$ на ортографическую плоскость будет взаимной с F в смысле, разъясненном в п. 26. В частности, сторонам M_1M_2, M_2M_3, $\ldots$, M_nM_1, расположенным на линиях действия сил $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, $\ldots$, $\boldsymbol{F}_n$, отвечают отрезки Q_1Q_2, Q_2Q_3, ..., Q_nQ_1, соответственно им параллельные. Но если фигура $\mathfrak{F}$ была построена произвольно, т. е. если высоты точек $\mathfrak{M}_i$ относительно ортографической плоскости были взяты произвольно, то нет основания для того, чтобы многоугольник $Q_1Q_2 \ldots Q_n$ был *силовым многоугольником* для сил $\boldsymbol{F}_i$. Мы покажем здесь, что, выбирая подходящим образом высоты отдельных точек $\mathfrak{M}_i$, можно добиться того, чтобы действительно указанный многоугольник был силовым многоугольником, т. е. чтобы ориентированные отрезки Q_1Q_2, Q_2Q_3, $\ldots$, Q_nQ_1, параллельные силам $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, $\ldots$, $\boldsymbol{F}_n$, были также равны им по величине и направлены каждый в сторону соответствующей силы.

Чтобы убедиться в этом, представим себе, что выбрана система декартовых осей координат $Oxyz$, имеющая плоскостью $z=0$ ортографическую плоскость и осью z центральную ось нулевой системы, так что соответствующее уравнение будет иметь вид (30), и обозначим через ξ_i, η_i, 0 координаты любой точки M_i $(i=1, 2, \ldots, n)$. Теперь остается подходящим образом выбрать третью координату ζ_i для каждой отдельно взятой точки $\mathfrak{M}_i$ (первые две координаты которой суть ξ_i, η_i).

Заметим сначала, что для системы сил F_i существует ∞^2 силовых многоугольников, наложимых друг на друга посредством поступательного перемещения, поэтому достаточно закрепить положение одной из вершин для того, чтобы многоугольник был однозначно определен. Выбрав один из этих многоугольников и обозначив его через $Q_1Q_2 \ldots Q_n$, предположим, что

$$\beta_i x-\alpha_i y+p_i=0 \qquad (i=1, 2, \ldots, n) \qquad (31)$$

есть уравнение стороны Q_iQ_{i+1} в нормальном виде, где α_i, β_i обозначают направляющие косинусы силы F_i.

Наша цель будет достигнута, если мы покажем, что при надлежащем выборе высот ζ_i отдельных точек $\mathfrak{M}_i$ каждой отдельно взятой прямой M_iM_{i+1} фигуры F соответствует [как проекция на плоскость $z=0$ поляры прямой $\mathfrak{M}_i\mathfrak{M}_{i+1}$ относительно нулевой системы (30)] прямая Q_iQ_{i+1} с уравнением (31). Для этой цели заметим, что, на основании уравнения (30), уравнения поляры прямой $\mathfrak{M}_i\mathfrak{M}_{i+1}$ (пересечения плоскостей, полярных точкам $\mathfrak{M}_i$ и $\mathfrak{M}_{i+1}$) имеют вид

$$k(z-\zeta_i)=\eta_i x-\xi_i y, \quad k(z-\zeta_{i+1})=\eta_{i+1}x-\xi_{i+1}y, \qquad (32)$$

так что уравнение проекции этой поляры на плоскость $z=0$, т. е. уравнение прямой, взаимной с M_iM_{i+1}, получится, если мы исключим z из уравнений (32). В результате мы получим уравнение

$$-k\,\Delta\zeta_i=x\,\Delta\eta_i-y\,\Delta\xi_i \qquad (i=1, 2, \ldots, n), \qquad (33)$$

где положено

$$\Delta\xi_i=\xi_{i+1}-\xi_i, \quad \Delta\eta_i=\eta_{i+1}-\eta_i; \quad \Delta\zeta_i=\zeta_{i+1}-\zeta_i$$
$$(i=1, 2, \ldots, n) \qquad (34)$$

Рассматривая теперь общий случай, когда две точки $M_i(\xi_i, \eta_i)$, $M_{i+1}(\xi_{i+1}, \eta_{i+1})$ различны, вспомним, что соединяющая их прямая есть линия действия силы F_i, направляющие косинусы которой — α_i, β_i, так что при подходящем множителе λ_i (по величине равном расстоянию M_iM_{i+1}) будем иметь

$$\Delta\xi_i=\lambda_i\alpha_i, \quad \Delta\eta_i=\lambda_i\beta_i \qquad (i=1, 2, \ldots, n) \qquad (35)$$

и уравнение (33) можно будет написать в виде

$$-\frac{k}{\lambda_i}\Delta\zeta_i = \beta_i x - \alpha_i y. \tag{33}$$

Для того чтобы это уравнение было тождественно с уравнением (31) прямой Q_iQ_{i+1}, необходимо и достаточно, чтобы было

$$\Delta\zeta_i = \zeta_{i+1} - \zeta_i = \frac{\lambda_i p_i}{k} \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{36}$$

Если M_{i+1} совпадает с M_i, то достаточно представить себе, что λ_i стремится к нулю, чтобы заключить, на основании самого уравнения (36), что в пределе мы получим $\Delta\zeta_i = 0$; таким образом, если совпадают две (или более) последовательные точки M, то будут совпадать также и соответствующие им вершины многогранника $\mathfrak{M}$.

Выбрав произвольно одну из величин ζ, например ζ_1, из первого из уравнений (36) мы получим значение ζ_2; складывая почленно два первых уравнения (36), получим ζ_3; продолжая таким образом, найдем ζ_n, сложив почленно первые $n-1$ уравнений (36).

После этого остается только проверить, удовлетворят ли полученные таким образом значения для ζ_i последнему из уравнений (36). Эту проверку можно выполнить, установив, что последнее уравнение является следствием остальных; в справедливости этого можно убедиться, складывая почленно все уравнения (36) и замечая, что получающееся в результате уравнение представляет собой тождество.

Действительно, прежде всего ясно, что сумма левых частей будет тождественно равна нулю, так что все сводится к тому, чтобы убедиться, будет ли равна нулю также и сумма правых частей, или, что равносильно, будет ли равно нулю выражение

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_i.$$

Это следует из обычного истолкования σ. Обозначив через x_i, y_i координаты точки Q_i, лежащей вместе с Q_{i+1} на прямой, выражающейся уравнением (31), будем тождественно иметь

$$\beta_i x_i - \alpha_i y_i + p_i = 0 \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

так что можно написать

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (\alpha_i y_i - \beta_i x_i),$$

или, на основании равенств (35) и (34),

$$\sigma = -\sum_{i=1}^{n} [y_i(\xi_{i+1} - \xi_i) - x_i(\eta_{i+1} - \eta_i)].$$

Но в силу соглашения считать тождественными два индекса, если они отличаются друг от друга на n, будем иметь тождественно

$$\sum_{i=1}^{n} y_i\xi_i = \sum_{i=1}^{n} y_{i+1}\,\xi_{i+1}, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i\eta_i = \sum_{i=1}^{n} x_{i+1}\,\eta_{i+1}$$

и, следовательно,

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} [\xi_{i+1}(y_{i+1} - y_i) - \eta_{i+1}(x_{i+1} - x_i)].$$

Отсюда, так как разности $x_{i+1} - x_i$, $y_{i+1} - y_i$ являются проекциями вектора $Q_{i+1} - Q_i = \boldsymbol{F}_i$, тогда как ξ_{i+1}, η_{i+1} суть координаты точки M_{i+1} на линии действия силы, приложенной в узле P_i, мы видим, что $-\sigma$ есть результирующий момент системы сил $\boldsymbol{F}_i$ относительно начала координат, в скалярном смысле, что подходит для плоского случая. Так как речь идет об уравновешенной системе, то непосредственно имеем $\sigma = 0$.

В заключение мы можем сказать, что тем самым в пространстве определен многогранник $\mathfrak{F}_1$, по крайней мере, с точностью до поступательного перемещения, перпендикулярного к ортографической плоскости, происходящего от произвольности выбора высоты одной из точек $\mathfrak{M}_i$.

Этот многогранник имеет:

1) ортогональной проекцией на ортографическую плоскость веревочный многоугольник, составленный из фермы и линий действия прямо приложенных сил;

2) полярной фигурой относительно нулевой системы (с осью, перпендикулярной к ортографической плоскости) фигуру F', которая проектируется на эту плоскость в виде диаграммы внешних сил и внутренних усилий; на диаграмме произвольно заданным является положение одной из вершин многоугольника внешних сил.

32. Для полноты рассмотрим случай, когда какая-нибудь прямо приложенная сила параллельна одной из двух смежных сил, так что соответствующая точка M уходит в бесконечность; надо заметить, что для практики этот случай наиболее важен, так как он имеет место для всех прямо приложенных сил, когда речь идет о фермах, подвергающихся исключительно действию вертикальных сил в узлах.

Легко видеть, что построения и рассуждения предыдущего пункта распространяются, с очевидными изменениями, также и на этот случай.

Пользуясь обозначениями предыдущего пункта, предположим, что $\boldsymbol{F}_j$ есть первая из прямо приложенных сил, параллельная смежной с ней силе $\boldsymbol{F}_{j+1}$, так что M_{j+1} есть первая из точек M, которая уходит в бесконечность. Для предыдущих точек $M_1, M_2, \ldots, M_j$

можно предположить, что соответствующие им вершины $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_j$ многогранника построены способом, указанным в предыдущем пункте. Что же касается несобственной точки M_{j+1}, то если α_j, β_j по прежнему обозначают направляющие косинусы силы F_j (и, следовательно, также силы F_{j+1}), то ее можно рассматривать как предельное положение точки с координатами $\rho\alpha_j$, $\rho\beta_j$, когда ρ стремится к бесконечности; высоту ζ_{j+1} точки $\mathfrak{M}_{j+1}$, проекцией которой на ортографическую плоскость является точка M_{j+1}, можно выразить в виде $\rho\chi_{j+1}$, где величина χ_{j+1} произвольна.

Вследствие этого уравнение (33), для значения j индекса i, если обе части этого уравнения разделить на ρ и заставить ρ стремиться к бесконечности, в пределе принимает вид

$$-k\chi_{j+1} = x\beta_j - y\alpha_j;$$

если сравним его с уравнением (31) при $i = j$, т. е. с уравнением

$$\beta_j x - \alpha_j y + p_j = 0 \tag{37}$$

прямой Q_jQ_{j+1}, то увидим, что

$$k\chi_{j+1} = p_j.$$

Таким образом (посредством своих однородных координат $\alpha_j:\beta_j:\chi_{j+1}:0$) определена та несобственная точка $\mathfrak{M}_{j+1}$, полярная плоскость которой (параллельная оси) пересекает полярную плоскость точки $\mathfrak{M}_j$ по прямой, имеющей проекцией на ортографическую плоскость прямую Q_jQ_{j+1}. Так как $\mathfrak{M}_{j+1}$ лежит в своей полярной плоскости, перпендикулярной к ортографической плоскости и пересекающей ее вдоль прямой Q_jQ_{j+1}, то этим подтверждается, что M_{j+1} (несобственная точка этой последней прямой) есть ортогональная проекция (на плоскость $z = 0$) точки $\mathfrak{M}_{j+1}$.

Если, далее, и точка M_{j+2} является несобственной, что равносильно тому, что сила F_{j+2} параллельна двум предыдущим, то сторона $Q_{j+2}Q_{j+3}$ многоугольника внешних сил будет идти по прямой двух предыдущих сторон Q_jQ_{j+1}, Q_{j+1}, Q_{j+2}, т. е. она также будет лежать на прямой, выражающейся уравнением (37), и точка M_{j+2} совпадет с M_{j+1}.

Для того чтобы и в этом случае общее построение привело к этой прямой (37), необходимо и достаточно, чтобы она была следом полярной плоскости (перпендикулярной к ортографической плоскости) точки $\mathfrak{M}_{j+2}$. Другими словами, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{M}_{j+2}$ совпадала с определенной ранее несобственной точкой $\mathfrak{M}_{j+1}$. Так продолжаем до тех пор, пока встречаются несобственные последовательные точки M, т. е. параллельные прямо приложенные силы.

33. Мысль обратиться к пространственным построениям для того, чтобы связать две диаграммы „а“ и „б“, соответствующие любой неизменяемой ферме без лишних стержней, принадлежит Максвеллу [1]), который, впрочем, пользовался не нулевой системой, а полярностью относительно параболоида вращения с осью, перпендикулярной к ортографической плоскости. Теория взаимных диаграмм Максвелла строится аналогично теории, указанной в предыдущих пунктах; при этом, однако, имеется то неудобство, что плоские диаграммы, к которым приходят таким путем, хотя и взаимны в смысле п. 26, но не обладают свойством параллельности между соответствующими сторонами. Стороны, соответствующие друг другу на обеих диаграммах в силу полярности относительно параболоида, будут взаимно перпендикулярными. Если мы примем во внимание, что главной целью этих способов является определение усилий, направление которых уже установлено стержнями фермы, так что для каждого из них требуется определить лишь величину и сторону действия, то станет очевидным, что ориентация диаграммы „б“ относительно диаграммы „а“ не имеет существенного значения. Но несомненно более наглядную связь между двумя диаграммами дает диаграмма „б“ с той ориентацией, к которой мы приходим прямым методом (п. 26).

Что этого можно достичь путем обращения к нулевой системе, впервые было доказано Кремона [2]) в его мемуаре „Le figure reciproche nella Statica grafica“ [3]).

§ 7. Гибкие и нерастяжимые нити

34. Определение и характеристический постулат. Рассуждения, подобные тем, которые были применены в § 2 к односвязным стержневым системам, позволяют рассмотреть задачу о равновесии *гибкой и нерастяжимой нити*. Под этим названием подразумевается всякая материальная система одного измерения (см. гл. X, п. 5), обладающая следующими свойствами:

а) под действием подходящих сил система может расположиться по любой геометрической линии;

---

[1]) Collected Papers, т. 1, стр. 514—525, т. 2, стр. 161—207.

[2]) Луиджи Кремона родился в Павии в 1830 г., умер в Риме в 1903 г. Преподавал последовательно в университете в Болонье, в Высшем техническом институте Милана и с 1873 г. до конца жизни в университете в Риме, руководя одновременно там же Школой инженеров. Из многочисленных научных трудов Кремона, которые, кроме мемуара, приведенного в тексте, выходят из области механики, здесь достаточно упомянуть открытие бирациональных преобразований, связанных с его именем.

[3]) Милан, 1872. См. также: *Opere matematiche*, т. III, стр. 336—366. Более обширные и систематические приложения этого метода можно найти у C. Saviotti, La Statica grafica, т. III, Милан, 1878; L. Henneberg, Die graphische Statik der starren Systeme, Лейпциг, 1911; M. Levy, La Statique graphique, ч. I, изд. 3, Париж, 1907. [См. также В. Л. Кирпичев, Основания графической статики, 1923. (*Прим. ред.*)]